МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (ДГТУ)

Факультет Энергетики и нефтегазопромышленности
Кафедра Автоматизация и математическое моделирование в нефтегазовом комплексе

Конспект лекций

По дисциплине Управление нефтегазовыми технологическими процессами
По направлению 150404 Автоматизация технологических процессов и производств
Форма обучения заочная.

Ростов-на-Дону
2023

Тема 1. Основные свойства систем управления.

Определение и общие характеристики системы. Одной из главных особенностей современной научной и технической деятельности является подход к объектам исследования и проектирования как к системам. В зависимости от характера деятельности в термин «система» вкладываются различные понятия, но во всех случаях система есть подмножество взаимосвязанных элементов, выделенное из множества элементов любой природы в соответствии с требованиями решаемой задачи.

Таким образом, при определении некоторого объекта как системы предполагается наличие: 1) объекта (системы), состоящего из множества элементов и их свойств, которые могут рассматриваться как единое целое благодаря связям между ними и их свойствами;

2) исследователя, выполняющего любую целенаправленную деятельность (исследовательскую, проектную, организационную и др.);

3) задачи, с точки зрения решения которой исследователь определяет некоторый объект как систему; 4) языка, на котором исследователь может описать объект, свойства его элементов и связи.

Рассмотрим подробнее входящие в определение системы термины «элементы», «связи», «свойства».

Элементы — это части или компоненты системы, условно принятые неделимыми.

Свойства — качества, позволяющие описывать систему и выделять ее среди других систем. Свойства характеризуются совокупностью параметров, одни из которых могут иметь количественную меру, другие выражаются лишь качественно.

Связи — это то, что соединяет элементы и их свойства. Предполагается, что каждый из элементов системы соединен прямо или

косвенно с любым другим элементом. Весьма важными для описания системы являются также понятия состояния и структуры системы.

Состояние системы в данный момент времени характеризуется значениями существенных с точки зрения решаемой задачи параметров системы.

Структура системы — это широкое понятие, характеризующее способ организации элементов в систему с определенными свойствами путем установления между ними взаимосвязей. Структура и свойства элементов определяют индивидуальные характеристики

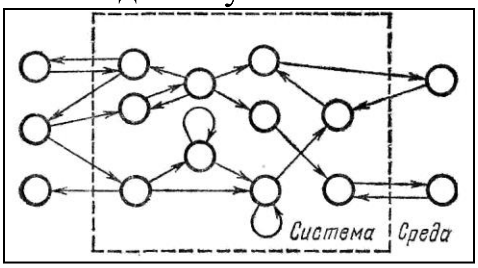
системы и позволяют рассматривать ее как целостное образование.

Целостность системы проявляется в том, что ее свойства могут качественно отличаться от свойств составляющих элементов. Например, радиоприемник можно представить как систему, элементами которой являются радиодетали (транзисторы, конденсаторы, резисторы и т. п.), электрически связанные определенным образом. Каждую деталь можно описать некоторыми свойствами, однако ни одна из них не обладает свойством радиоприемника — воспринимать и преобразовывать электромагнитные колебания в звуковые.

Таким образом, система — это не сумма составляющих ее частей, а целостное образование с новыми свойствами, которыми не обладают ее элементы.

Удобной формой описания системы является *граф,* в котором элементы представлены вершинами, а связи между ними — дугами. Направление дуги соответствует направлению воздействия одного элемента на другой (рис. 1.1). В зависимости от направления различают входные и выходные воздействия, которые принято называть входом и выходом элемента. Выходы являются реакцией элемента на входные воздействия. Следовательно, свойства элемента можно характеризовать, описав выполняемое им преобразование входных воздействий в выходные. Топология графа отражает *структуру системы.* Из такого определения системы не следует, что все ее элементы должны быть физическими объектами. Примером системы, не имеющей физической природы, может служить математическая система уравнений — элементами такой системы являются переменные. Связи задаются соответствующими уравнениями. Системы подобного типа называют *абстрактными.*

Система и ее среда. Как следует из определения, понятие «система» ограничивает некоторое множество элементов. При этом предполагается, что может существовать множество элементов за пределами системы, с которыми она взаимодействует.



Изображение системы в форме графа

Это множество принято называть *внешней средой.* Элементы, не взаимосвязанные с системой, не являются частями ее среды.

Система, не имеющая внешней среды, называется *изолированной.* В реальном мире не существует изолированных систем, поэтому концепция изолированности в решении конкретных проблем используется редко.

Систему, у которой есть внешняя среда, называют *открытой.* Если объект определен как открытая система, то возникает вопрос: какие элементы включить в систему, а какие — отнести к внешней среде. Универсальных правил для решения этого вопроса не существует, так как хотя конкретные системы по своему характеру объективны, на них в то же время наложен субъективный отпечаток, поскольку образующая их конфигурация элементов обусловлена требованиями задачи, формулировку и решение которой осуществляет исследователь.

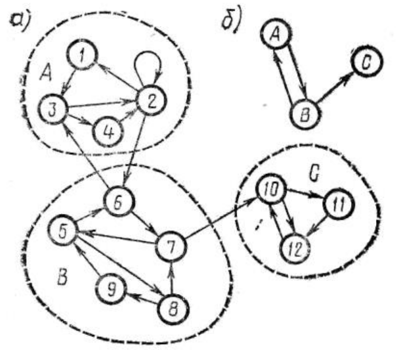
Действительно, один и тот же объект, например производственный цех, различными исследователями может быть представлен в виде различных систем. Для экономиста систему «цех» составляют такие элементы, как станки, предметы труда, сырье, связанные между собой материальными, энергетическими и финансовыми потоками. Элементами внешней среды являются смежные цехи, заводской административный аппарат, склады материалов и готовой продукции и другие объекты, функционирование которых существенно влияет на экономические показатели работы цеха. При этом экономист, естественно, не учитывает огромное количество связей другого типа вследствие их слабого влияния на экономику цеха. С точки зрения проблем, решаемых, например, психологом, цех представляет собой совершенно другую систему. Элементами ее являются отдельные люди и их коллективы, объединенные связями психологического типа. Психолога могут интересовать вопросы влияния на изучаемый им коллектив других цеховых коллективов, которые образуют внешнюю среду системы.

Следовательно, разделение множества взаимосвязанных элементов на систему и внешнюю среду основано на точке зрения исследователя, которую формируют характер решаемой проблемы, существенность взаимосвязей между множеством рассматриваемых элементов, а также индивидуальность мышления исследователя. Определяя объект как систему, исследователь с указанных позиций выделяет систему из внешней среды (очерчивает границы системы), указывает входные и выходные связи, устанавливает факторы, которыми должны описываться состояния системы.

Иерархия систем. Относительность точки зрения на систему проявляется и в том, что одну и ту же совокупность элементов допустимо рассматривать либо как систему, либо как часть некоторой, более крупной системы, т. е. множество элементов системы можно разделить на ряд подмножеств. Часть системы, образованная из элементов подмножества, называют *подсистемой.*

Пусть система **S** образована из элементов 1–12 $\{x_1, x_2, \dots, x_{12}\}$, связанных между собой некоторым образом. Один из возможных вариантов разбиения системы S на три подсистемы *A, B* и *C* показан на рис. Очевидно, подмножество элементов $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, образующих подсистему *A,* можно рассматривать как систему, тогда *B* и *C* будут элементами внешней среды. Предположим, что исследователя не интересуют свойства элементов и структура подсистем *A, B* и *C,* так как решаемая задача допускает рассмотрение свойств и связей систем *A, B* и *C.* В этом случае система упростится, как показано на рис., т. е. подсистемы *A, B* и *C* будут рассматриваться как элементы системы S.

Таким образом, каждая система может рассматриваться либо как подсистема или элемент некоторой, более крупной системы, либо как совокупность элементов, каждый из которых допустимо определить как систему. Существует иерархия систем, в которой элементами системы i-го уровня являются системы (i + 1)-го уровня (рис.). Например, промышленное предприятие можно представить как систему, элементами которой являются цехи. Цех может быть представлен как совокупность производственных участков и т. д. Очевидно, выбрав в качестве исходного уровня рассмотрения предприятие, исследователь может расширять представления о системе не только «вниз», как показано, но и «вверх», т. е. переопределяя выделенную систему (в данном случае предприятие) как подсистему или элемент более крупной системы (например, объединения или отрасли промышленности).



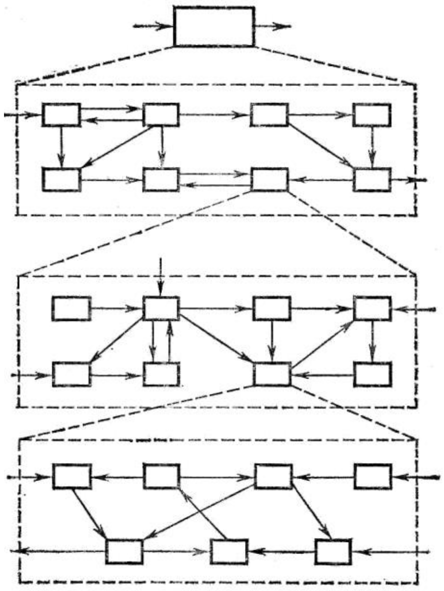
Разделение системы на подсистемы

Анализ и моделирование систем. *Моделью* называют отображение определенных характеристик объекта с целью его изучения. Любая исследовательская и проектная деятельность так или иначе связана с построением моделей. Проект машины, завода, чертеж детали, макет нового здания или самолета — все это модели будущих реальных объектов. Изучение явлений, происходящих в природе, в сфере деятельности людей (экономической, политической, общественной) также связано с их моделированием. Модель позволяет выделить из всего многообразия проявлений изучаемого объекта лишь те, которые необходимы с точки зрения решаемой проблемы, т. е. модель — не точная копия объекта, а отражение лишь определенной части его свойств. Поэтому центральной проблемой моделирования является разумное упрощение модели, т. е. выбор степени подобия модели и объекта.

В этой связи рассмотрим понятия изоморфизма и гомоморфизма. Если элементы, связи и преобразования системы *А* и системы *В* находятся во взаимно однозначном соответствии, то эти системы *изоморфны.*

Если между двумя объектами установлен изоморфизм относительно выделенной совокупности элементов, связей и преобразований, то каждый из этих объектов может служить моделью другого. Следовательно, с точки зрения результатов исследования, не имеет значения, какой из этих объектов будет изучаться. Выбор одного из них в качестве модели определяется удобствами исследования.

Система *В* называется *гомоморфной* относительно системы *А,* если каждой связи, элементу и преобразованию системы *А* соответствуют определенный элемент, связь и преобразование в системе *В.* В отличие от изоморфизма при гомоморфизме соответствие между системами направлено в одну сторону, т. е. нескольким элементам, связям и преобразованиям системы *А* могут соответствовать один элемент, одна связь и одно преобразование в системе *В.* Следовательно, гомоморфный образ в общем случае является упрощенной моделью, частным описанием отображаемой системы. Обычно модель конструируется как гомоморфный образ объекта и как изоморфный образ изучаемых свойств и характеристик. Таким образом, модель есть система, свойства которой достаточно близки к свойствам изучаемой системы.



Иерархия подсистем

Модели могут быть реализованы как физическими, так и абстрактными системами. Соответственно различают физические и абстрактные модели. *Физическими моделями* являются, например макеты приборов, сооружений машин. К физическим относятся также электрические модели объектов и явлений.

В *абстрактных моделях* описание объектов или явлений делается на каком-либо языке. В качестве языков моделирования могут использоваться, например, естественный язык, язык чертежей, схем, математический язык. Описание объекта или явления, сделанное на математическом языке, называют *математической моделью.*

Примером математической модели может служить дифференциальное уравнение вида $\mathbf{md^2y\ (t)/dt^2 = -\gamma y\ (t)}$ **,**описывающее процесс свободных колебаний пружинного маятника. Здесь m — масса груза; $y\ (t)$ — отклонение центра масс груза от положения равновесия в момент времени t; γ — жесткость пружины.

График свободных колебаний пружинного маятника также является его абстрактной моделью, в которой использован графический язык описания. Как известно, одним и тем же дифференциальным уравнением часто можно описать явления, имеющие различную физическую природу. Так, приведенное выше уравнение описывает также свободные колебания в электрическом контуре *LC*. Это значит, что свойства колебаний в пружинном маятнике и в контуре *LC* одинаковы и последний может рассматриваться как электрическая модель пружинного маятника.

Представление реального объекта как системы, использование системных понятий при его моделировании послужили методологической основой для ряда принципов исследования, объединенных общим названием *системный анализ.* Рассмотрим некоторые из этих принципов, важные с точки зрения дальнейшего изложения. Каждую систему в иерархии систем можно исследовать в двух аспектах — как элемент более широкой системы и как совокупность взаимосвязанных элементов. Два аспекта обусловливают два принципиально различных подхода к анализу систем: микроанализ (микроподход) и макроанализ (макроподход).

Микроанализ системы ведется в направлении изучения и моделирования ее структуры и свойств элементов. При этом, естественно, предполагается, что элементы и связи доступны для наблюдения. Часто микроанализ сводится к исследованию функций элементов и процесса функционирования системы.

Макроанализ концентрирует внимание исследователя на системе в целом, ее свойствах, поведении, взаимодействии с окружающей средой. Лишь с этой точки зрения исследователя интересуют свойства элементов системы и ее внутренняя структура. Результатом макроанализа является макроскопическое описание (макромодель) системы. Часто для построения макромодели система рассматривается в виде «черного ящика». Это образное понятие означает, что внутреннее устройство системы вследствие каких-либо причин скрыто от исследователя. Наблюдаемы лишь связи системы с внешней средой. Изучая изменение выходов системы в зависимости от вариации входных воздействий, исследователь получает представление о свойствах системы, а в тех случаях, когда это требуется, строит гипотезы о ее внутреннем строении. Такой метод исследования и моделирования называют *методом черного ящика.*

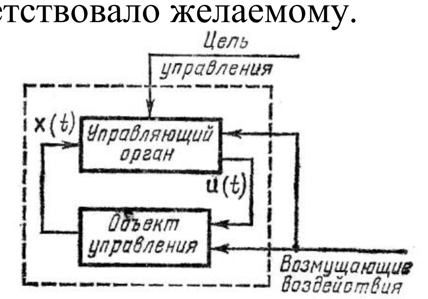
Тема 2. Объекты управления и автоматизации и их основные характеристики.

Любой целенаправленный процесс, происходящий в машине, живом организме или выполняемый человеком, представляет собой организованную совокупность операций, которые условно можно разбить на две группы: рабочие операции и операции управления. *Рабочие операции* — это действия, необходимые непосредственно для выполнения процесса в соответствии с природой и законами, определяющими ход процесса. Например, процесс обработки детали

на токарном станке состоит из таких рабочих операций, как закрепление детали, подача резца, снятие стружки и др.

Для достижения цели процесса рабочие операции должны организовываться и направляться действиями другого рода — *операциями управления.* Так, в процессе токарной обработки детали совершаются такие операции управления, как своевременное включение и выключение станка, поддержание заданного числа оборотов заготовки, целенаправленное изменение скорости, направления движения резца и т. п. Совокупность операций управления образуют *процесс управления.*

Система, в которой осуществляется процесс управления, называется *системой управления.* В структурном аспекте любую систему управления можно представить взаимосвязанной совокупностью объекта управления (управляемой подсистемы) и управляющего органа (управляющей подсистемы) (рис. 1.4). Объектом управления могут быть отдельный механизм, машина, станок, агрегат, бригада рабочих или отдельный рабочий, цех или все предприятие, производственное объединение или отрасль народного хозяйства. В качестве управляющего органа можно рассматривать устройство или человека, управляющих станком, агрегатом, механизмом. Управляющим органом являются также бригадир, осуществляющий руководство бригадой, управленческий персонал цеха, завода или министерства. Любой процесс управления должен быть целенаправленным. Это значит, что управляющему органу должна быть известна цель управления, т. е. информация, используя которую можно определить желаемое состояние объекта управления. Управляющий. орган воздействует на объект управления так, чтобы его состояние соответствовало желаемому.



Обобщенная структура системы управления

Объект управления представляет собой открытую систему, а значит находится в динамическом взаимодействии с внешней средой. Влияние внешней среды на объект управления, как правило, носит неконтролируемый характер и выражается в случайном изменении его состояния. Воздействие окружающей среды на объект управления называют *возмущающим воздействием.*

Поведение любой системы управления определяется целью управления, характером возмущающих воздействий, а также свойствами объекта управления и управляющего органа. Для формального описания задачи управления введем ряд определений. Предположим, что вся доступная информация о поведении объекта управления содержится в n функциях времени x_i (t), i=1, 2, ..., n. Будем рассматривать переменные x_i как компоненты многомерной векторной функции x (t), называемой *вектором состояния объекта управления.* В системе управления переменные x_i являются контролируемыми выходными переменными объекта управления и одновременно входными переменными управляющего органа (рис).

Состояние объекта управления изменяется под действием двух основных факторов. Первый фактор — влияние возмущающих воздействий. Эти воздействия, как правило, формируются во внешней по отношению к системе управления среде и оказывают неконтролируемое влияние на объект управления. Условимся характеризовать возмущающие воздействия вектор-функцией $f(t)=\{f_1(t),...,f_k(t)\}$, называемой *вектором возмущения.* Второй фактор, изменяющий вектор состояния х *(t),* представляет собой целенаправленное влияние управляющего органа на объект управления, которое будем описывать вектор-функцией $u(t)= \{u_1(t), ..., u_m(t)\}$ и называть *вектором управления* или *управляющим воздействием.* В системе управления переменные $u_j(t)$, $j= 1, 2, ..., m$ являются входными переменными объекта управления (управляющими переменными) и одновременно выходными переменными управляющего органа.

В любой момент времени *t* состояние объекта управления х *(t)* является функцией векторов $u(t)$, $f(t)$, а также начального состояния $x(t_0)$, т. е.

$$x(t) = X\{u(t),f(t),x(t_0)\}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) есть математическая модель объекта управления, описывающая закон его функционирования. Единственный фактор, который можно целенаправленно изменять в процессе управления, — это вектор управления *u(t).* Желаемое состояние объекта управления не всегда бывает известно заранее. Поэтому задача управления формулируется следующим образом: *найти такие вектор управления и вектор состояния, которые обеспечивают достижение цели управления.*

Цель управления может иметь различную формулировку, однако в большинстве случаев формально ее можно определить значением *J** некоторого функционала *J*, который называют *показателем цели управления* или *критерием управления:*

$$J = J\{x(t), f(t), u(t)\}. \qquad (2)$$

В реальных объектах управления изменение вектора состояния и вектора управления может происходить лишь в определенной конечной области значений, что формально представляется системой следующих ограничений:

$$u(t)=A(t),\ x(t)=B(t) \qquad (3)$$

Здесь *А (t)* и *В (t)* — замкнутые области соответственно векторного пространства управлений и векторного пространства состояний.

Решение задачи управления состоит в том, чтобы найти такие значения векторов состояния х**(t)* и управления u**(t),* при которых выполняется условие $J\{x^*(t), f(t), u^*(t), x^0(t)\} = J^*$ и одновременно удовлетворяются ограничения (3).

На практике достижение точного значения цели управления обеспечить трудно, а часто и не требуется. Достаточно, чтобы модуль разности между достигнутым значением показателя цели управления J^k и значением J^* не превышал некоторой заранее заданной величины б, т. е.

$$|J^*- J^k| = |\Delta J| \le \delta.$$

Заметим, что значение ΔJ может отражать качество управления. В зависимости от типа системы управления вектор состояния х**(t)* называют планом или программой управления, а вектор управления u**(t)* — управляющим воздействием или решением. В несколько иной форме задачу управления можно сформулировать следующим образом: найти и реализовать функциональную зависимость

$$u^*(t) = U\{x(t), f(t)\} \qquad (4)$$

обеспечивающую наилучшее приближение к заданному значению критерия управления.

Выражение (4) называют *алгоритмом управления.*

Задача управления упрощается, если цель управления задается как вектор желаемого состояния х* *(t),* т. е. считается, что план и программа управления известны и могут быть сообщены системе заранее. Тогда критерий управления можно представить функционалом

J=J{ε(t)} ***(5)***

от ошибки *ε(t)* = $x^*(t)$- *х (t),* где х*(t)* — вектор текущего состояния объекта управления.

Этот частный случай задачи управления называют *задачей регулирования.* Строго задача регулирования формулируется следующим образом: полагая заданным х* *(t),* найти такой закон регулирования который

$u^*(t)$ = U{ ε (t)} ***(6)***

обеспечивает экстремум критерия (1.5).

Таким образом, задачу регулирования можно рассматривать как частный случай задачи управления. Процесс управления можно условно разбить на совокупность следующих функций: планирование или определение программы управления; контроль; формирование управляющего воздействия или принятие решения; реализация управляющего воздействия или решения.

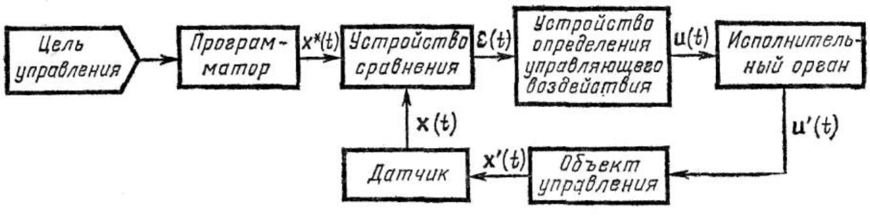
Определение программы управления (планирование) заключается в выработке траектории движения системы *х*(t)* в пространстве параметров ее состояния.

Контроль состоит в измерении значений компонентов вектора состояния *x(t)* и определения вектора ошибки *ε(t).*

Формирование управляющего воздействия (принятие решений) заключается в определении значений управляемых переменных, приводящих объект управления в желаемое состояние.

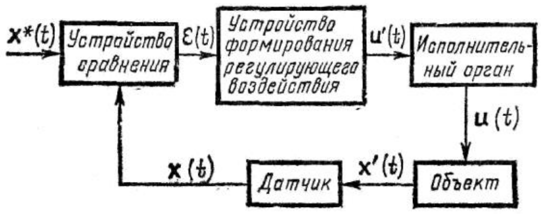
Реализация управляющего воздействия — это непосредственное физическое воздействие на объект управления.

На рис. представлен вариант функциональной схемы системы управления. Она имеет программатор, определяющий программу или план; устройство



Функциональная схема системы управления.

сравнения, осуществляющее операцию контроля; устройство формирования управляющего воздействия; исполнительный орган, реализующий управляющее воздействие; объект управления; датчик или первичный преобразователь, который переводит информацию о векторе состояния на физический носитель.



Функциональная схема системы регулирования

Функциональная схема системы регулирования (рис.) отличается от схемы системы управления отсутствием программатора. Желаемое состояние объекта задается извне и называется обычно *задающим воздействием.*

Тема 3. Анализ и синтез систем автоматического управления.

Системы управления весьма разнообразны, и их целесообразно разбить на классы. Рассмотрим классификацию систем управления по трем следующим признакам: степень автоматизации функций управления; степень сложности и степень определенности.

В зависимости от степени автоматизации функций управления различают ручное, автоматизированное и автоматическое управление. При ручном управлении все функции процесса выполняются человеком — оператором. *Автоматизированным называют процесс управления, в котором часть функций выполняется человеком, другая часть — автоматическими устройствами.* При автоматическом управлении все функции выполняются автоматическими устройствами. Соответственно принято различать автоматизированные и автоматические системы управления.

По степени сложности системы управления делят на простые и сложные. Строгого определения, позволяющего четко разделить эти системы, не существует. Понятие «сложная система» возникло как отражение факта существования в реальном мире таких объектов, достаточно полное описание которых либо затруднительно, либо совсем невозможно. Интуитивно представление о сложной системе можно получить, рассмотрев свойства систем, состоящих из большого числа элементов.

Пусть система состоит из n элементов. Максимальное число направленных связей между элементами, очевидно, равно $n\ (n - 1)$. Число комбинаций связей (по типу «связь есть», «связь отсутствует») определяется значением $2^{n(n-1)}$. Это значит, что система из трех элементов может иметь число комбинаций связей 64, система из четырех элементов — 4096, а система из десяти элементов — $1{,}24 \cdot 10^{27}$. Если считать (упрощенно), что состояние системы определяется наличием или отсутствием тех или иных связей в системе, то легко представить, как быстро растет число возможных состояний системы при сравнительно небольшом увеличении количества составляющих ее элементов. Сложной принято называть такую систему, которую трудно или невозможно изучать путем исследования ее всех возможных состояний.

Естественно, такую характеристику сложности нужно рассматривать лишь как ее иллюстрацию. На практике приходится учитывать качественные особенности связей, их существенность и ряд других факторов, которые могут упростить или еще более усложнить исследование системы.

Рассмотрим теперь понятие сложной системы управления. Как следует из выражения (4), управляющее воздействие есть функция состояния объекта управления, т. е. каждому состоянию объекта управления должно соответствовать определенное состояние управляющего органа. Это значит, что управляющий орган должен обладать не меньшим числом возможных состояний, чем объект управления. Следовательно, управляющий орган для эффективного управления должен быть такой же сложности, как и объект управления. Когда объектом управления является сложная система, управляющий орган тоже представляет собой сложную систему. Совокупность сложного управляющего органа и сложного объекта управления называют *сложной системой управления.*

Сложные системы управления имеют следующие важные особенности:

1. Число параметров, которыми описывается сложная система, весьма велико. Многие из этих параметров не поддаются количественному описанию и измерению.

2. Цели управления не поддаются формальному описанию без существенных упрощений. Цели являются функциями времени.

Система может состоять из подсистем, каждая из которых имеет собственную цель управления. В процессе управления собственные (локальные) цели подсистем нужно согласовывать с общей (глобальной) целью системы, что, как правило, является сложной задачей.

3. Трудно или даже невозможно дать строгое формальное описание сложной системы управления. Как правило, основной задачей при моделировании таких систем является поиск разумного упрощения их описания.

По степени определенности системы управления обычно разбивают на детерминированные и вероятностные (стохастические).

Детерминированной системой называют систему, в которой по ее предыдущему состоянию и некоторой дополнительной информации можно безошибочно (т. е. вполне определенно) предсказать ее последующее состояние.

В вероятностной системе на основе предыдущего состояния и дополнительной информации можно предсказать лишь множество возможных будущих состояний и определить вероятность каждого из них.

Разбиение систем на простые и сложные, детерминированные и вероятностные в определенной мере условно. По мере развития средств моделирования и исследования конкретная реальная система может перейти из одного класса в другой. В результате использования двух последних классификационных признаков все системы управления можно разделить на четыре категории: простые детерминированные; сложные детерминированные; простые вероятностные; сложные вероятностные.

К числу *простых детерминированных систем* относится, например, автопилот. Примером *сложной детерминированной системы* служит ЭВМ. Этот весьма сложный прибор, включающий большое количество элементов и имеющий огромное число возможных состояний, является все же полностью детерминированным устройством. Поведение ЭВМ определяется совокупностью программ, которые она выполняет. Отклонение от поведения, предписанного программами, означает неисправность.

Простой вероятностной системой можно назвать систему статистического контроля качества продукции предприятия по одному или нескольким параметрам, которая предусматривает выборочную проверку заданных параметров с определенной периодичностью. *Сложной вероятностной системой* являются производственное предприятие, крупная строительная организация, отрасль промышленности и подобные им объекты.

Число элементов, разнообразие связей, вероятностная природа законов функционирования делает эти системы настолько сложными, что их полное формальное описание не представляется возможным. Потребность в управлении сложными системами привела к созданию специальных методов.

В последние годы в большинстве работ, посвященных исследованию общих принципов управления, используется *методология системного анализа*. Системный анализ позволяет исследовать различные по своей природе объекты с единой точки зрения. В основу методологии системного анализа положены такие понятия, как «система», «сложная система», «иерархия систем», «модель», «цель» и др. Определение этих понятий, а также некоторые принципы системного анализа изложены в объеме, необходимом для понимания последующего материала. Однако для современного специалиста требуется более глубокое знание методологии системного анализа.

Уравнения динамики и статики. Линеаризация.

В теории автоматического управления рассматривают математическую модель системы автоматического управления (САУ), т. е. модель, которая получается в результате математического описания САУ. Математическое описание может быть аналитическим (с помощью уравнений), графическим (с помощью графиков, структурных схем и графов) и табличным (с помощью таблиц). Для получения математического описания САУ обычно составляется описание ее отдельных элементов. В частности, для получения уравнений САУ составляются уравнения для каждого входящего в нее элемента. Совокупность полученных уравнений и дает аналитическое описание САУ.

Математическое описание можно получить на основе физических (химических и других) законов, которым подчиняются процессы в элементах САУ, или экспериментально. При получении математического описания исходят из противоречивых требований. С одной стороны, математическая модель должна как можно полнее отражать свойства оригинала, а с другой стороны, быть по возможности простой, чтобы не усложнять исследование. Часто полезно на первом этапе исследования принимать более простую модель, а затем при необходимости усложнять ее.

Обычно САУ описываются нелинейными уравнениями. Но часто их можно линеаризовать, т. е. перейти от исходной нелинейной модели к более простой линейной (линеаризованным уравнениям).

Линеаризации бывают обычные, гармонические, статистические и др. *Обычными* будем называть линеаризации, основанные на разложении нелинейной функции в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки и отбрасывании нелинейных слагаемых. Например, если задана нелинейная зависимость $F(\dot{x}, x, u) = 0$,, то после обычной линеаризации в окрестности заданной точки $(\dot{x}^0, x^0, u^0)$ получим

$$a_0\Delta\dot{x} + a_1\Delta x + b_0\Delta u = 0$$, где

$$\Delta\dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_0 \qquad \Delta x = x - x^0,\ \Delta u = u - u^0$$

$$a_0 = (\partial F/\partial\dot{x})^0\ a_1 = (\partial F/\partial x)^0 \quad b_0 = (\partial F/\partial u)^0$$

Индексы 0 означают, что производные вычисляются в заданной точке, которой соответствует определенный номинальный (заданный, представляющий интерес) процесс. В последнем уравнении учтено, что $F(\dot{x}^0, x^0, u^0) = 0$. Полученное линейное уравнение по

отношению к исходному называется *линеаризованным уравнением,* а процесс перехода от исходного уравнения к линеаризованному — *линеаризацией.* Обычная линеаризация возможна, если функция, описывающая нелинейную зависимость, является гладкой. Если обычная линеаризация невозможна, то в определенных случаях для упрощения исследования можно воспользоваться другими способами линеаризации.

Пусть в приведенном уравнении *x* — выходная величина, а *u* — входное воздействие. Примем, что при постоянном входном воздействии$u = u^0$привыходная$t \to \infty$ величина устанавливается и принимает постоянное значение *x*°. Тогда в установившемся режиме *x* = 0 и уравнение примет вид$F(0, x^0, u^0) = 0$. Это уравнение называется *уравнением статики* в отличие от исходного, которое называется *уравнением динамики* (или *динамическим уравнением).*

Рассмотрим различные способы математического описания *стационарных линейных непрерывных САУ,* т. е. САУ, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, и *стационарных линейных импульсных САУ,* т. е. САУ, которые могут быть описаны линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Уравнения и передаточные функции непрерывных систем.

Математическая модель любой части САУ называется *звеном.* В частности,

звеном может быть математическая модель всей системы или любого ее элемента. Любое стационарное линейное непрерывное звено с двумя входами (рис.) описывается уравнением вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y =$$
$$= b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \ldots + b_m u + c_0 f^{(l)} + c_1 f^{(l-1)} + \ldots + c_l f,$$

(7)

где $y^{(i)}$, $u^{(i)}$, $f^{(i)}$ — i-е производные по времени.

Для линейных систем (звеньев) справедлив принцип суперпозиции: реакция системы на несколько одновременно приложенных воздействий равна сумме реакций системы на каждое воздействие

в отдельности. Этот принцип следует из свойства решений линейных дифференциальных уравнений, В частности, для системы (4.1) принцип суперпозиции означает следующее. Если $y_u(t)$— реакция

системы (изменение выходной величины) при $u = u_0(t)$ и $f = 0$,

$y_f(t)$ — реакция системы при $f = f_0(t)$ и $u = 0$, то при $u = u_0(t)$

И $f = f_0(t)$ (при одних и тех же начальных условиях) ее реакция

$y(t) = y_u(t) + y_f(t)$.

Благодаря принципу суперпозиции исследование систем с несколькими входами всегда можно свести к исследованию систем с одним входом. Система (звено) с одним входом описывается уравнением вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \ldots + b_m u. \quad (4.2)$$

(8)

Символическая форма записи. Для операции дифференцирования введем обозначение *р* (его называют оператором дифференцирования). По определению,

$py = dy/dt$, $p^i y = d^i y/dt^i$.

Используя *р,* уравнение (8) можно представить в виде

$$a_0 p^n y + a_1 p^{n-1} y + \ldots + a_n y = b_0 p^m u + b_1 p^{m-1} u + \ldots + b_m u.$$

При записи и преобразовании дифференциальных уравнений оператор *р* можно рассматривать как алгебраический сомножитель, а выражение *ру* — как произведение, не обладающее свойством коммутативности: нельзя вместо *ру* писать yp $(py \neq yp)$. Учитывая это, преобразуем последнее уравнение,

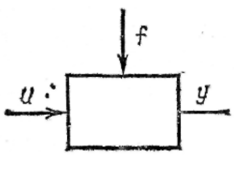


Схема звена с двумя входами

вынеся *у* и *u* за скобки:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)\, y =$$
$$= (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m)\, u. \quad \textbf{(9)}$$

Введем обозначения $Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$, $R(p) =$ $= b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m$ и представим уравнение (9) в более компакт-

ной форме:
$$Q(p)\,y = R(p)\,u.$$

Дифференциальный оператор *Q (p)* при выходной величине называют *собственным оператором,* а дифференциальный оператор *R (p)* при входной величине — *оператором воздействия.* Все уравнения, записанные с использованием оператора *p,* являются символической формой записи уравнения (8). Такая запись удобна при определении передаточных функций.

Передаточные функции. Для описания САУ используются две различные передаточные функции — в операторной форме и в изображениях Лапласа. *Передаточной функцией в операторной форме W (p)* называется отношение оператора воздействия к собственному оператору. *Передаточной функцией в изображениях Лапласа W (s)* называется отношение изображений Лапласа выходной величины

к входной при нулевых начальных условиях. Здесь *s* — переменная преобразования Лапласа.

Согласно определению, передаточная функция в операторной форме звена (8) или (9)
$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Используя *W (p),* получим уравнение $y = W(p)\,u,$ которое является одной из разновидностей символической формы записи уравнения (8).

Чтобы определить передаточную функцию в изображениях Лапласа звена (8), произведем преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях:
$$L\{a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny\} = L\{b_0u^{(m)} + b_1u^{(m-1)} + \ldots + b_mu\}.$$

Здесь L — символ преобразования (оператор) Лапласа. При нулевых начальных условиях $L\{y^{(i)}(t)\} = L\{p^iy(t)\} = s^iY(s),$ где $Y(s) = L\{y(t)\}$

Используя это свойство и свойство линейности преобразования Лаплса$L\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha L\{x_1(t)\} + \beta L\{x_2(t)\}$, получаем
$$(a_0s^n + a_1{}^{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_n)\,Y(s) = (b_0s^m + b_1s^{m-1} + \ldots + b_m)\,U(s). \quad \textbf{(10)}$$

Очевидно, чтобы перейти от (8) к (10), нужно представить (8) в символической форме (9) и подставить в (9) вместо *p* переменную *s*, а вместо *y (t)* и *u (t)* — их изображения.

По определению, из (10) для передаточной функции в изображениях Лапласа звена (8) получаем
$$W(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \ldots + a_n} \quad \textbf{(11)}$$

Поэтому уравнение в изображениях Лапласа (при нулевых начальных условиях) звена (8) приобретает вид
$$X(s) = W(s)\,U(s)$$

Очевидно, передаточная функция *W (s)* получается из *W (p)* формальной подстановкой *p* — *s:* $W(s) = W(p)|_{p=s}$. Такая связь

между двумя формами передаточных функций справедлива только для стационарных систем.

Если система (звено) имеет q входов и r выходов, то для ее описания требуется qr передаточных функций. В частности, звено (7) с двумя входами и одним выходом описывается двумя передаточными функциями:

$$W_u(p)=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n},\quad W_f(p)=\frac{c_0p^l+c_1p^{l-1}+\ldots+c_l}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n}.$$

Используя эти передаточные функции, уравнение (7) в символической форме получает вид

$$y(t)=W_u(p)\,u(t)+W_f(p)\,f(t).$$

Нетрудно также составить для этого звена передаточные функции и уравнения в изображениях Лапласа. Передаточная функция системы наряду с дифференциальными уравнениями широко используется для описания САУ. Но при ненулевых начальных условиях она не всегда является ее исчерпывающей характеристикой. Если собственный оператор и оператор воздействия системы имеют общие множители (нули), то при вычислении передаточной функции они сокращаются. И в этом случае по передаточной функции САУ нельзя восстановить ее дифференциальное уравнение и получить описание процессов в ней при произвольных начальных условиях.

Рассмотрим для примера системы, которые описываются уравнениями $\ddot{x}-x=\dot{g}-g,\quad \dot{x}+x=g.$ Им соответствует передаточная функция $W(p)=1/(p+1)$.

Их решениями при $g=t$ являются соответственно функции:

$$x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{t}+t-1,\quad x(t)=Ce^{-t}+t-1.$$

Эти решения совпадают только при условии $\dot{x}(0)=0,\ x(0)=0$ (т. е.при нулевых начальных условиях). При других начальных условиях они не совпадают и передаточная функция $W(p)=1/(p+1)$ не может служить описанием системы, определяемой первым из приведенных дифференциальных уравнений.

Частотные и временные характеристики непрерывных систем.

Частотные характеристики. Рассмотрим звено с передаточной функцией (4.5). Функция $W(j\omega)$, которая получается из переда-

точной функции при подстановке в нее s = jw:

$$W(j\omega)=(b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+\ldots+b_m)/(a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_n),$$

называется *частотной передаточной функцией.* Ее можно представить в виде:

$$W(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)=A(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)},$$

где $A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)},\ \varphi(\omega)=\arg\ W(j\omega).$

На комплексной плоскости частотная передаточная функция $W(j\omega)$ определяет вектор ОС, длина (модуль) которого равна $A(\omega)$, а угол, образованный этим вектором с действительной положительной полуосью, равен $\varphi(\omega)$. Кривая, которую описывает конец этого вектора при изменении частоты от нуля до бесконечности,годограф вектора $W(j\omega)$, называется *амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ).* Иногда рассматривают АФЧХ при изменении ω от $-\infty$ до ∞.. Еслиявляется $W(s)$ дробно-рациональной функцией (отношением полиномов), то, как нетрудно показать, $U(\omega)$ является четной, а $V(\omega)$ — нечетной функцией ω.

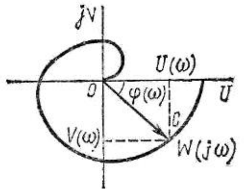
Поэтому АФЧХ при отрицательных значениях со получается зеркальным отображением относительно действительной оси АФЧХ при положительных ω.

Действительную часть $U(\omega) = \mathrm{Re}\, W(j\omega)$ и мнимую часть $V(\omega) = \mathrm{Im}\, W(j\omega)$ называют соответственно *вещественной* и *мнимой частотными функциями.* График вещественной частотной функции (кривая зависимости $U = U(\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞) называют *вещественной частотной характеристикой,* а график мнимой частотной функции — *мнимой частотной характеристикой.* Модуль $A(\omega) = |W(j\omega)|$ — *амплитудная частотная функция,* а ее график — *амплитудная частотная характеристика.* Аргумент $\varphi(\omega)\, \arg W(j\omega)$ называют *фазовой частотной функцией,* а ее график — *фазовой частотной характеристикой.*

Когда $|\arg W(j\omega)| \leqslant \pi/2$, фазовая частотная функция $\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\, [V(\omega)/U(\omega)]$ В общем случае:

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,[V(\omega)/U(\omega)] + k\pi,$$
$$k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots,$$

где k определяется из каких-либо дополнительных данных.



Амплитудно фазовая частотная характеристика

Установим, какой же физический смысл имеют частотные характеристики. Если на вход устойчивой линейной стационарной системы подается гармонический сигнал $u = a \sin \omega t$,, то на ее выходе после окончания переходного процесса устанавливается гармонический процесс с амплитудой b и фазой, сдвинутой относительно фазы входного сигнала на угол фи (рис. 4.3). Амплитуда b и сдвиг фазы ‘фи’ зависят от частоты входного сигнала и свойства системы. Кроме того, амплитуда b зависит еще от амплитуды входного сигнала. Но отношение b/a не зависит от амплитуды a. Оказывается, что $b/a = A(\omega)$ и $\varphi = \varphi(\omega)$,т. е. *амплитудная частотная функция равна отношению амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного гармонического сигнала (в установившемся режиме), а фазовая частотная функция — сдвигу фазы выходного сигнала.*

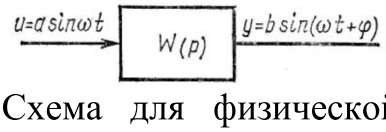


Схема для физической интерпретации частотных характеристик.

Кроме перечисленных частотных характеристик используются логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ) — *логарифмические амплитудные частотные характеристики (ЛЛЧХ)* и *логарифмические фазовые* *частотные характеристики (ЛФЧХ).*

ЛАЧХ — это график зависимости $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ от логарифма частоты $\lg \omega$. При построении ЛАЧХ по оси абсцисс откладывают частоту в логарифмическом масштабе (на отметке, соответствующей значению $\lg \omega$, указывают значение со), а по оси ординат — $L(\omega)$. ЛФЧХ — это график зависимости фазовой частотной функции $\varphi(\omega)$ от логарифма частоты $\lg \omega$.

При его построении по оси абсцисс, как и при построении ЛАЧХ, на отметке, соответствующей значению $\lg \omega$, указывают значение 'омега', по оси ординат откладывают $\varphi(\omega)$ в градусах или радианах.

Единицей $L(\omega)$ является децибел (дБ), а единицей логарифма частоты в ЛЧХ — декада (дек). Декадой называют интервал, на котором частота изменяется в десять раз. Ось ординат при построении ЛЧХ проводят через произвольную, удобную для рассматриваемой задачи точку, а не через точку $\omega = 0$, так как частоте $\omega = 0$ соответствует бесконечно удаленная точка: $\lg \omega \to -\infty$ при $\omega \to 0$.

Временные характеристики. Переходное и импульсные переходные характеристики называются временными. Они используются при описании линейных систем, как стационарных, так и нестационарных.

Переходной функцией звена называется функция $h(t)$, которая описывает его реакцию (изменение выходной величины) на единичное ступенчатое воздействие $1(t)$ при нулевых начальных условиях. По определению,

$$1(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t \geqslant 0; \\ 0 \text{ при } t < 0. \end{cases}$$

График переходной функции — кривая зависимости *h (f)* от времени *t* — называется *переходной или разгонной характеристикой.*

Импульсной переходной или весовой функцией называется функция *w* (t), которая описывает реакцию звена на единичное импульсное воздействие при нулевых начальных условиях. График импульсной переходной функции называется *импульсной переходной характеристикой.*

При определении весовой функции *w (t)* использовано понятие единичного импульса. Единичный импульс — импульс с единичной площадью бесконечно малой длительности. Он описывается дельта-функцией S *(t),* которая является обобщенной функцией. Ее можно определить следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\,dt = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0),$$

где е — произвольное положительное число; $\varphi(t)$ — произвольная, непрерывная в окрестности нуля финитная (т. е. отличная от нуля на конечном интервале) функция.

Производная по времени от дельта-функции определяется так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\delta}(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \dot{\delta}(t)\varphi(t)\,dt = -\dot{\varphi}(0);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(m)}(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta^{(m)}(t)\varphi(t)\,dt\,(-1)^m\varphi^{(m)}(0).$$

Здесь $\varphi(t)$ — обычная финитная функция, обладающая m-й производной; $\delta^{(m)}(t)$— *m-я* производная по времени от дельта-функции.

Произведя преобразование Лапласа от дельта-функции и ее производных, получаем

$$L\{\delta(t)\}=1,\ L\{\dot{\delta}(t)\}=s,\ \ldots,\ L\{\delta^{(m)}(t)\}=s^m.$$

Установим связь между функциями $w(t)$, $h(t)$ и $W(s)$. Приведем уравнение звена в изображениях Лапласа

$$Y(s)=W(s)\,U(s). \tag{12}$$

В соответствии с определением весовой функции $\omega(t)$ при $u=\delta(t)$ выходная величина $y(t)=w(t)$. Так как $L\{\delta(t)\}=1$, то уравнение (12) при $u=\delta(t)$ принимает вид

$L\{w(t)\}=W(s)$, откуда

$$W(s)=\int_0^\infty w(t)\,e^{-st}\,dt,$$

т. е. передаточная функция $W(s)$ есть изображение Лапласа весовой функции.

По определению переходной функции $h(t)$ при $u=1(t)$ выходная величина $y=h(t)$ (рис. 4.4). Так как $L\{1(t)\}=1/s$, то уравнение (4.6) при $u=1(t)$ принимает вид $L\{h(t)\}=W(s)/s$ или $sL\{h(t)\}=W(s)$. Так как при нулевых начальных условиях умножению изображения на *s* соответствует дифференцирование оригинала, то, переходя к оригиналам, из последнего уравнения получаем $w(t)=dh(t)/dt$.

Весовая и переходная функции, как и передаточная функция, являются исчерпывающими характеристиками звена только при нулевых начальных условиях. По ним можно однозначно определить выходную величину при произвольном входном воздействии. Действительно, при переходе к оригиналам в уравнении (4.6), используя теорему о свертке (свойство преобразования Лапласа), получаем

$$y(t)=\int_0^t w(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau=\int_0^t w(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau.$$

Эта формула справедлива только при нулевых начальных условиях. Ее также можно представить в виде

$$y(t)=\int_0^\infty w(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau=\int_0^\infty w(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau, \tag{13}$$

так как $w(t-\tau)=0$ и $u(t-\tau)=0$ при $t<\tau$.

Элементарные звенья и их характеристики.

Как известно из курса алгебры, полином произвольного порядка можно разложить на элементарные (простые) множители вида k, s, $(s+d_1)$, $(s^2+d_1s+d_2)$. Поэтому любую дробно-рациональную передаточную функцию всегда можно представить в виде произведения элементарных множителей и элементарных дробей вида *Ms*,

$1/(s+d_1)$, $1/(s^2+d_1 s+d_2)$.

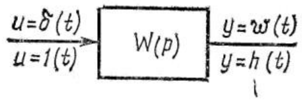


Схема для вывода весовой и переходной функций

Звенья, передаточные функции которых имеют вид элементарных множителей или элементарных дробей, называют *элементарными*. Элементарные множители, представляющие собой полиномы первого и второго порядка, можно преобразовать к принятому в теории автоматического управления стандартному виду:

$$k(Ts+1),\ k(T^2s^2 \pm 2\xi Ts \pm 1),\ 0 \leqslant \xi < 1.$$

При этом $k\ (k>0)$ называют *передаточным коэффициентом,* $T\ (T>0)$ — *постоянной времени* (имеет единицу измерения времени), ξ— *коэффициентом демпфирования.*

Напомним правило вычисления модуля и аргумента дроби и произведения комплексных чисел, так как оно часто используется при вычислении амплитудной и фазовой частотных функций. *Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов его сомножителей. Модуль дроби равен отношению модуля числителя к модулю знаменателя, а аргумент — разности аргументов числителя и знаменателя.*

Рассмотрим основные типы элементарных звеньев.

Пропорциональное звено — звено с передаточной функцией $W(s)=k$. Его частотные и временные функции:

$$W(j\omega)=k,\ U(\omega)=k,\ V(\omega)=0,\ A(\omega)=k;\ \varphi(\omega)=0,$$
$$L(\omega)=20\lg k,\ h(t)=k1(t),\ w(t)=k\delta(t).$$

Дифференцирующее звено — звено с передаточной функцией $W(s)=ks$. Его частотные и временные функции:

$$W(j\omega)=jk\omega,\ U(\omega)=0,\ V(\omega)=k\omega,\ A(\omega)=k\omega,\ \varphi(\omega)=\pi/2,$$
$$L(\omega)=20\lg k+20\lg\omega,\ h(t)=k\delta(t),\ w(t)=k\dot{\delta}(t).$$

Интегрирующее звено — звено с передаточной функцией *W (s)* = = *r/s*. Его частотные и временные функции:

$$W(j\omega)=-jk/\omega,\ U(\omega)=0,\ V(\omega)=-k/\omega,\ A(\omega)=k/\omega,$$
$$\varphi(\omega)=-\pi/2,\ L(\omega)=20\lg k-20\lg\omega,\ h(t)=kt,\ w(t)=k.$$

Форсирующее звено первого порядка — звено с передаточной функцией $W(s)=k(Ts+1)$. Его частотные и временные функции:

$$W(j\omega)=k(Tj\omega+1),\ U(\omega)=k,\ V(\omega)=kT(\omega),\ A(\omega)=$$
$$=k\sqrt{(T\omega)^2+1},\ \varphi(\omega)=\mathrm{arctg}(T\omega),$$
$$L(\omega)=20\lg k+20\lg\sqrt{(T\omega)^2+1},\ h(t)=k[T\delta(t)+1(t)],$$
$$w(t)=k[T\dot{\delta}(t)+\delta(t)].$$

Апериодическое звено — звено с передаточной функцией *W* (s) = *kl(Ts*+ 1). Его частотные и временные функции:

$$W(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1},\ U(\omega)=\frac{k}{(T\omega)^2+1},\ V(\omega)=\frac{kT\omega}{(T\omega)^2+1},$$

$$A(\omega)=\frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2+1}},\quad \varphi(\omega)=-\operatorname{arctg}(\omega T),$$
$$L(\omega)=20\lg k-20\lg\sqrt{(T\omega)^2+1},\quad h(t)=k(1-e^{-t/T}),$$
$$w(t)=(k/T)\,e^{-t/T}.$$

Форсирующее звено второго порядка — звено с передаточной функцией $W(s)=k(T^2s^2+2\xi Ts+1),\ 0\leqslant\xi<1$. Его частотные функции:

$$W(j\omega)=k[1-(T\omega)^2+j2\xi T\omega],\quad U(\omega)=k[1-(T\omega)^2],$$
$$V(\omega)=2k\xi T\omega,\quad A(\omega)=k\sqrt{[1-(T\omega)^2]^2+(2\xi T\omega)^2},$$
$$\varphi(\omega)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\{2\xi T\omega/[1-(T\omega)^2]\} & \text{при } \omega\leqslant 1/T,\\ \pi+\operatorname{arctg}\{2\xi T\omega/[1-(T\omega)^2]\} & \text{при } \omega>1/T,\end{cases}$$
$$L(\omega)=20\lg k+20\lg\sqrt{[1-(T\omega)^2]^2+(2\xi T\omega)^2}.$$

Колебательное звено — звено с передаточной функцией $W(s)=k/(T^2s^2+2\xi Ts+1),\ 0\leqslant\xi<1$. Его частотные и временные функции:

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}-\operatorname{arctg}\{2\xi T\omega/[1-(T\omega)^2]\} & \text{при } \omega\leqslant 1/T,\\ -\pi-\operatorname{arctg}\{2\xi T\omega/[1-(T\omega)^2]\} & \text{при } \omega>1/T,\end{cases}$$
$$V(\omega)=\frac{2k\xi T\omega}{[1-(T\omega)^2]^2+(2\xi T\omega)^2},\quad A(\omega)=\frac{k}{\sqrt{[1-(T\omega)^2]^2+(2\xi T\omega)^2}},$$
$$W(j\omega)=\frac{k}{[1-(T\omega)^2]+j2\xi T\omega},\quad U(\omega)=\frac{k[1-(T\omega)^2]}{[1-(T\omega)^2]^2+(2\xi T\omega)^2},$$
$$L(\omega)=20\lg k-20\lg\sqrt{[1-(T\omega)^2]^2+(2\xi T\omega)^2},$$
$$h(t)=k\left[1-\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\varphi_0)\right],\ w(t)=[k(\alpha^2+\beta^2)/\beta]\,e^{-\alpha t}\sin\beta t,$$

где $\alpha=\xi/T,\ \beta=\sqrt{1-\xi^2}/T,\ \varphi_0=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-\xi^2}/\xi\right)$.

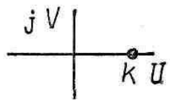
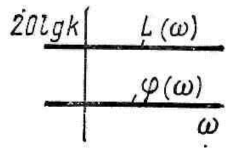
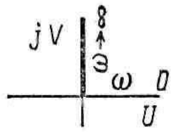
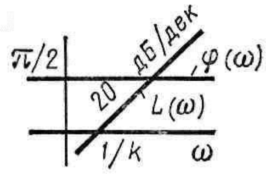
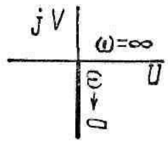
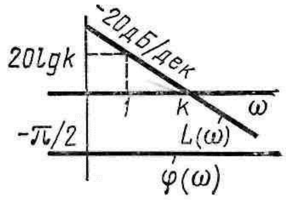
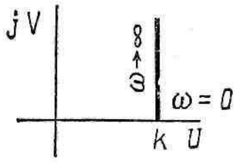
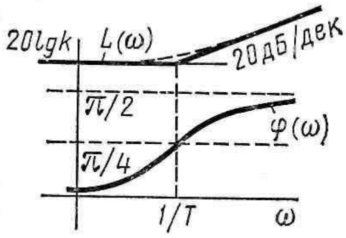
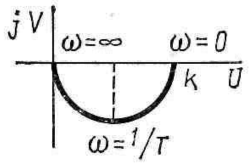
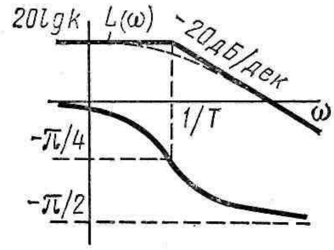
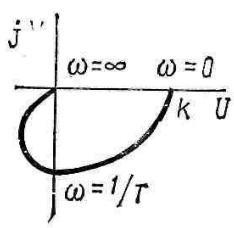
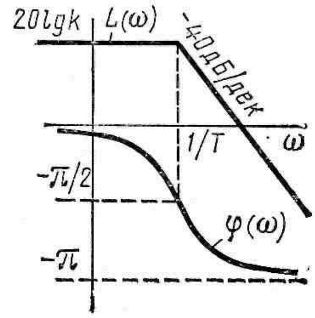
При $\xi=0$ это звено также называют *консервативным.*

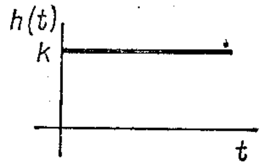
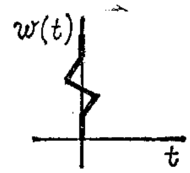
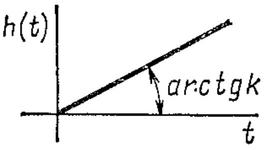
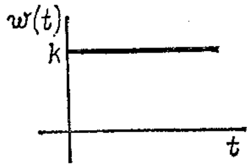
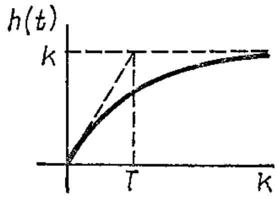
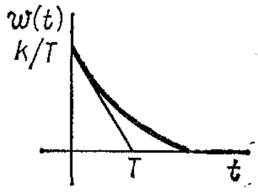
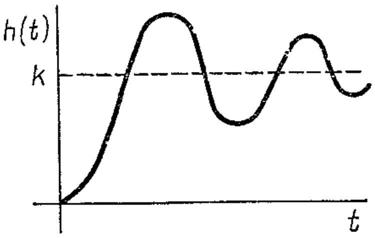
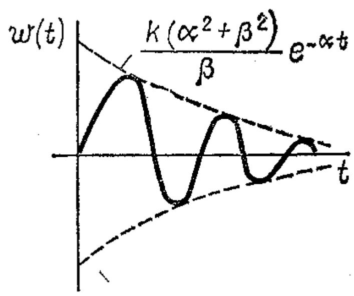
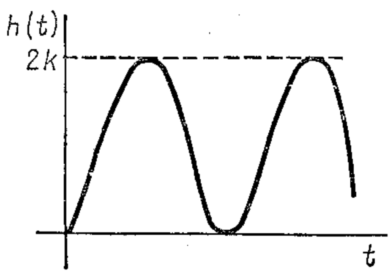
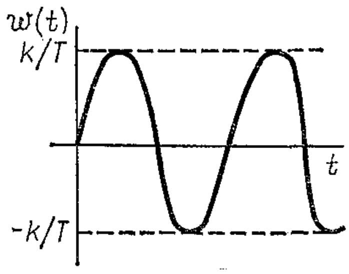
Элементарные звенья относятся к типовым. Поэтому их также называют *типовыми.* Примером типового звена, не являющегося элементарным, является звено чистого запаздывания.

Звено чистого запаздывания — звено с передаточной функцией $W(s)=ke^{-\tau s}$. Его частотные и временные функции:

$$W(j\omega)=ke^{-j\tau\omega}=k(\cos\tau\omega-j\sin\tau\omega),\quad U(\omega)=k\cos\tau\omega,$$
$$V(\omega)=-k\sin\tau\omega,\quad A(\omega)=k,\quad \varphi(\omega)=-\tau\omega,\quad L(\omega)=20\lg k,$$
$$h(t)=k1(t-\tau),\quad w(t)=k\delta(t-\tau).$$

В табл. приведены частотные характеристики и временные характеристики некоторых элементарных звеньев. Логарифмические амплитудные частотные характеристики (ЛАЧХ) пропорционального, дифференцирующего и интегрирующего звеньев являются прямыми, и их легко построить. Построение других элементарных и неэлементарных звеньев требует трудоемких вычислений. Поэтому на практике часто ограничиваются построением приближенных, так называемых *асимптотических ЛАЧХ* (в табл. 4.1 сплошные ломаные линии).

Звено и ее частотная передаточная функция	Амплитудно-фазовая частотная характеристика	Логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики
Пропорциональное звено, $W(j\omega)=k$		
Дифференцирующее звено, $W(j\omega)=kj\omega$		
Интегрирующее звено, $W(j\omega)=-jk/\omega$		
Форсирующее звено, $W(j\omega)=k(Tj\omega+1)$		
Апериодическое звено. $W(j\omega)=\dfrac{k}{Tj\omega+1}$		
Колебательное звено, $W(j\omega)=\dfrac{k}{(1-T^2\omega^2)+j2\xi T\omega}$		

Звено	Переходная характеристика	Импульсная переходная характеристика
Пропорциональное		
Интегрирующее		
Апериодическое		
Колебательное		
Консервативное		

При построении асимптотической ЛАЧХ апериодического звена в выражении

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(T\omega)^2 + 1}$$

при $\omega \leqslant 1/T$ под корнем пренебрегают меньшим слагаемым $(T\omega)^2$, а при $\omega > 1/T$ — единицей, т. е. принимают

$$L(\omega) \approx \begin{cases} 20 \lg k & \text{при } \omega \leqslant 1/T; \\ 20 \lg k - 20 \lg (T\omega) & \text{при } \omega > 1/T. \end{cases}$$

При построении асимптотической ЛАЧХ колебательного звена в выражении

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\xi T\omega)^2}$$

при $\omega \leqslant 1/T$ под корнем оставляют только единицу, а при $\omega > 1/T$ — только слагаемое $(T\omega)^4$, содержащее сомножитель ω в наибольшей степени, т. е. принимают

$$L(\omega) \approx \begin{cases} 20 \lg k & \text{при } \omega \leqslant 1/T, \\ 20 \lg k - 40 \lg (T\omega) & \text{при } \omega > 1/T. \end{cases}$$

Аналогично выполняют при построении асимптотических ЛАЧХ форсирующих и других звеньев. Частоты, при которых асимптотическая ЛАЧХ имеет излом, называются *сопрягающими.*

Правило построения ЛЧХ. Для построения асимптотической ЛАЧХ и логарифмической фазовой частотной характеристики (ЛФЧХ) звена с произвольной дробно-рациональной передаточной функцией W (s) нужно ее числитель и знаменатель разложить на элементарные множители и привести передаточную функцию к виду

$$W(s) = \frac{k}{s^{\nu}} W^0(s),$$

где W^0 (s)— отношение произведений из множителей вида

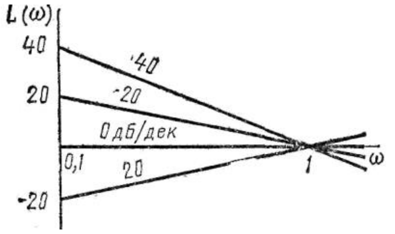
и $(T_i^2 s^2 \pm 2\xi T_i s \pm 1)$, $0 < \xi < 1$.

$(T_i s \pm 1)$

Правило построения асимптотической ЛАЧХ. Нужно вычислить 20 lg k и сопрягающие частоты $\omega_i = 1/T_i$ $(i = 1, 2)$, которые условно пронумерованы в порядке возрастания частоты: $\omega_1 < \omega_2 < \ldots$ Построение ЛАЧХ начинают с нижнечастотной (первой) асимптоты. На оси абсцисс отмечают сопрягающие частоты, а на координатной плоскости — точку с координатами $\omega = 1$ и $L(\omega) = =20 \lg k$.Через эту точку проводят первую асимптоту под наклоном — $\nu \cdot 20$ дБ/дек до первой сопрягающей частоты. Вторую асимптоту проводят от конца первой асимптоты до сопрягающей частоты ω_2.Ее наклон изменяют (по сравнению е первой асимптотой) на ± 20 или ± 40 дБ/дек в зависимости от того, является ли T_1 $(\omega_1 = 1/T_1)$ постоянной времени элементарного множителя первого или второго порядка соответственно. Знак берется положительный, если этот множитель находится в числителе, и отрицательный, если он находится в знаменателе. Третью асимптоту проводят от конца второй асимптоты до следующей сопрягающей частоты ω3. Ее наклон изменяют по сравнению с предыдущей второй асимптотой так, как это указано выше, в зависимости от того, каким элементарным звеном обусловлена сопрягающая частота $\omega_2 = 1/T_2$.Аналогично строят все последующие асимптоты.

Асимптота имеет наклон $+\nu \cdot 20$ или $-\nu \cdot 20$ дБ/дек это значит, что ее ордината увеличивается или уменьшается на v20 дБ соответственно при увеличении ω на одну декаду, т. е. в десять раз см (рис).

Схема построения логарифмической асимптотической частотной характеристики



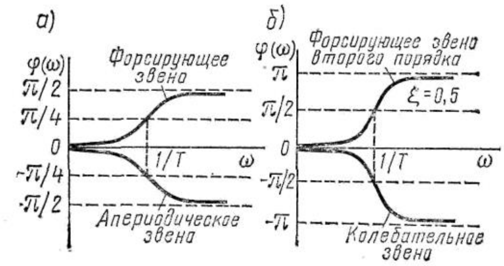
Логарифмическая асимптотическая частотная характеристика

Асимптотическая ЛАЧХ наиболее сильно отличается от точной в точках излома (при сопрягающих частотах). Причем в точках излома, где наклон изменяется на 20 дБ/дек, отклонение асимптотической ЛАЧХ от точной примерно равно 3 дБ (при условии, что соседние точки излома располагаются не очень близко). В точках излома, где наклон изменяется на 40 дБ/дек, т. е. при сопрягающих частотах, соответствующих колебательному звену или форсирующему звену второго порядка, указанное отклонение зависит от коэффициента демпфирования ξ и при малых ξ принимает большое значение. Поэтому при наличии в асимптотической ЛАЧХ излома, обусловленного звеном (множителем) второго порядка с малым ξ необходимо внести соответствующие поправки. В критических случаях, когда небольшая погрешность в построении ЛАЧХ может повлиять на выводы, возникает необходимость внесения поправки и в окрестности других точек излома. Для внесения поправок можно воспользоваться кривыми поправок, которые имеются в книгах по теории автоматического управления.

Правило построения ЛФЧХ. Пусть числитель и знаменатель передаточной функции звена разложены на элементарные множители, т. е. передаточная функция представлена в виде произведения передаточных функций элементарных звеньев. Тогда фазовая частотная функция $\varphi(\omega)$ звена будет равна сумме фазовых частотных функций $\varphi_i(\omega)$ указанных элементарных звеньев. Поэтому для построения ЛФЧХ звена достаточно построить ЛФЧХ указанных элементарных звеньев и сложить их.

ЛФЧХ пропорционального, дифференцирующего и интегрирующего звеньев строятся легко, так как они представляют собой прямые. Для построения ЛФЧХ апериодического и форсирующего звеньев можно воспользоваться шаблоном. Вид ЛФЧХ этих звеньев не зависит от значений параметров звеньев, их положение вдоль оси частот определяется постоянной времени *T:* при $\omega = 1/T$ для форсирующего звена фи=пи/2 и для апериодического звена $\varphi = -\pi/2$. ЛФЧХ апериодического звена получается из ЛФЧХ форсирующего звена (при одинаковых значениях постоянных времени) зеркальным отображением относительно оси частот (рис. 4.7, *а)*.

Для построения ЛФЧХ колебательного и форсирующего звеньев второго порядка также можно воспользоваться шаблоном. Вид ЛФЧХ этих звеньев зависит от значения параметра ξ $(0 < \xi < 1)$, и поэтому нужно иметь набор шаблонов, соответствующих различным значениям ξ. Их положение вдоль оси частот зависит от постоянной времени *T:* при $\omega = 1/T$ для форсирующего звена второго порядка $\varphi = \pi/2$ и для колебательного звена $\varphi = -\pi/2$. ЛФЧХ колебательного звена получается из ЛФЧХ форсирующего звена второго порядка (при одних и тех же значениях ξ и T для обоих звеньев) зеркальным отображением относительно оси частот (рис.'4.7, *б).*



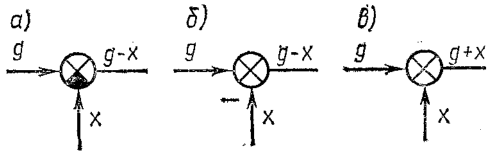
Логарифмическая фазовая частотная характеристика элементарных звеньев

Структурные схемы и правила их преобразования.

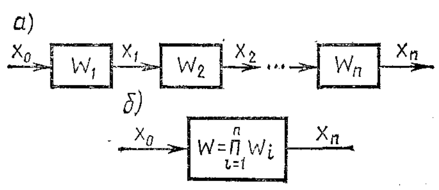
Структурной схемой называется графическое представление математической модели системы в виде соединений звеньев, условно обозначаемых в виде прямоугольника с указанием входных и выходных величин, а также передаточной функции или уравнения этого звена. Передаточную функцию (уравнение) можно записать внутри или вне прямоугольника.

Суммирующие звенья изображаются в виде круга, разделенного на секторы (рис. 4.8, *а, б, в).* Сектор, на который подается величина с обратным (отрицательным) знаком, затемняют (рис. 4.8, *а)* или перед соответствующим входом ставят знак минус (рис. 4.8, *б).*

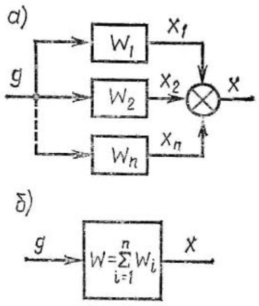
При математическом описании систему обычно изображают в виде функциональной схемы и для каждого блока (элемента) составляют уравнения, которыми описываются процессы, происходящие в нем. Структурную схему можно составить на основе этой функциональной схемы и полученных уравнений или только на основании последних. Преобразования, необходимые для получения уравнений и передаточных функций системы, проще и нагляднее производить по структурной схеме. Звено структурной схемы не обязательно изображает модель какого-либо элемента. Оно может быть моделью элемента, соединения элементов или вообще любой части системы. Рассмотрим основные типы соединений и правила структурных преобразований.



Схемы суммирующих звеньев



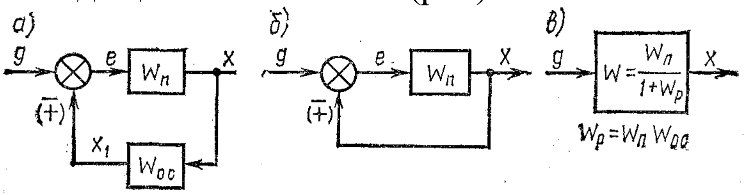
Последовательное соединение



Параллельное соединение

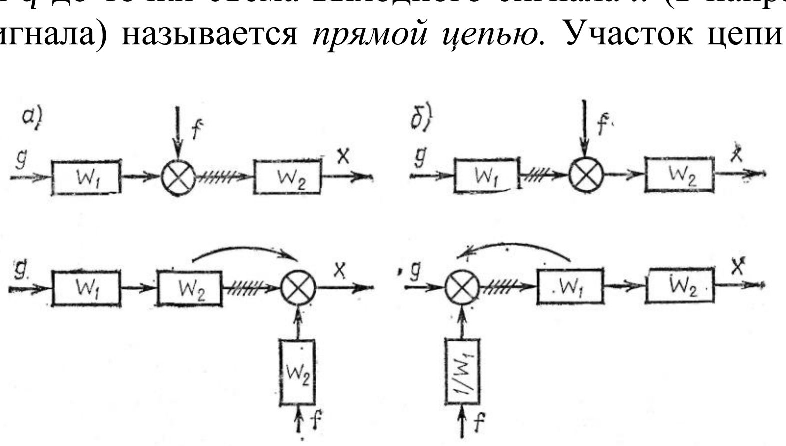
Последовательное соединение — это соединение, при котором выходная величина предшествующего звена является входным воздействием последующего звена (рис. 4.9, *а).* При преобразовании структурных схем цепочку из последовательно соединенных звеньев можно заменить одним звеном с передаточной функцией, равной произведению передаточных функций отдельных звеньев (рис. 4.9, *б).*

Параллельное соединение — это соединение, при котором на вход всех звеньев подается одно и то же воздействие, а выходные величины складываются (рис. 4.10, *а).* Цепь из параллельно соединенных звеньев можно заменить одним звеном с передаточной функцией, равной сумме передаточных функций входящих в нее звеньев (рис).



Обратное соединение

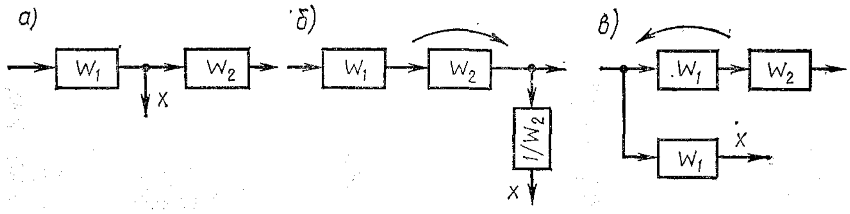
Обратное соединение — это соединение, при котором звено охвачено обратной связью: выходной сигнал одного звена через какое-либо другое звено подается на вход первого (рис). Такое соединение также называют соединением обратной связи. Участок цепи от точки приложения входного воздействия *q* до точки съема выходного сигнала *x* (в направлении распространения сигнала) называется *прямой цепью.* Участок цепи от точки съема выходного



Перенос сумматора

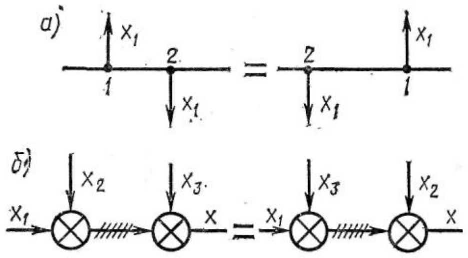
сигнала до сумматора называется *обратной связью.* Если сигнал обратной связи x_1 вычитается из входного воздействия $(e = g - x_1)$, то обратная связь называется *отрицательной;* в противном случае $(e = g + x_1)$ обратная связь называется *положительной.* Если передаточная функция $W_{ос} = 1$, то обратная связь называется *единичной* и структурную схему изображают так, как показано на рис.

Звено, охваченное обратной связью, можно заменить одним звеном с передаточной функцией $W = W_п/(1 \pm W_п W_{ос})$, где плюс в знаменателе правой части берется при отрицательной обратной связи, минус — при положительной (рис). При размыкании замкнутой цепи сразу после сумматора получается цепь из двух последовательно соединенных звеньев. Ее передаточная функция, равная $W_р = W_п W_{ос}$, называется *передаточной функцией разомкнутой цепи (системы).*



Перенос узла

Перенос сумматора. При переносе сумматора по ходу сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор (рис. 4.12, *а).* При переносе сумматора против хода сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор (рис). При переносе сумматора возникают неэквивалентные участки цепи (заштрихованные участки на рис). Поэтому при



Перестановка узлов и сумматоров

преобразовании структурных схем нельзя переносить сумматор через точку съема сигнала.

Перенос узла. При переносе узла по ходу сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится узел.

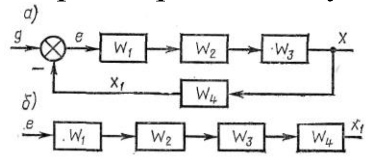


Рис. 4.15. Схема для вычисления передаточной функции одноконтур-

ной системы

Схема для вычисления передаточной функции одноконтурной системы.

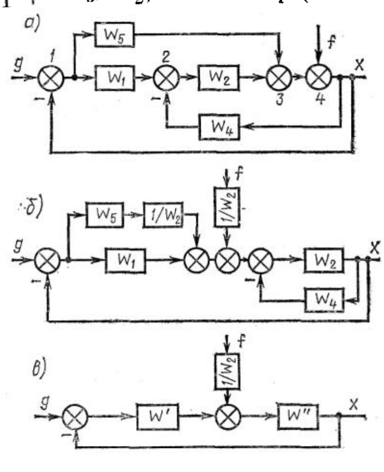
При переносе узла против хода сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится узел (рис).

Перестановка узлов и сумматоров. Узлы можно переставлять местами (рис). Сумматоры также можно переставлять местами (рис. 4.14, б), но при этом участки между сумматорами не являются эквивалентными.

Вычисление передаточной функции одноконтурной системы. Замкнутая система называется *одноконтурной,* если при ее размыка-

многоконтурную систему в одноконтурную. Правило вычисления передаточной функции одноконтурной системы сформулировано выше.

Пример: Вычислим передаточные функции W_{xg} и W_{xf} системы, представленной на рис. Освободимся от перекрещивающихся связей. Перенесем сумматор *3* через звено с передаточной функцией W_2 и сумматор *2*. То же самое выполним с сумматором *4,* для того чтобы можно было преобразовать обратное соединение звеньев с передаточными функциями W_2 и W_4. Тогда получим схему (рис. 4.17, б). После преобразования параллельного и обратного соединений получим одноконтурную схему, для которой $W' = W_1 + W_5/W_2$, $W'' = W_2/(1 + W_2W_4)$.



К примеру.

Используя правило вычисления передаточной функции одноконтурной системы, получим

$$W_{xg} = W'W''/(1 + W'W''),$$
$$W_{xf} = W''/[W_2(1 + W'W'')].$$

Дифференциальные уравнения. Имея передаточные функции системы, нетрудно составить ее дифференциальные уравнения. Если система имеет одну управляемую величину, то для ее полного описания достаточно иметь одно дифференциальное уравнение, выражающее зависимость между выходной и входными величинами.

$$x = W_{xg}g + W_{xf}f.$$

Это дифференциальное уравнение в символической форме, связывающее величину x с входными величинами. Аналогично можно составить дифференциальное уравнение относительно другой выходной величины. Вычислив передаточные функции W_{xg} и W_{xf}, нетрудно перейти от символической формы к обычной форме записи дифференциального уравнения системы.

Структурные преобразования (к примеру 4.3)нии (сразу после сумматора) получается цепочка из последовательно соединенных звеньев или цепь, не содержащая параллельных соединений и обратных связей (рис. 4.15, а, б). Используя правила преобразования при последовательном и обратном соединениях, легко получить следующее правило: *передаточная функция* W_{zg} *одноконтурной системы относительно заданных входа* g *и выхода г равна передаточной функции прямой цепи* $W_п$, *деленной на* $1 + W_р$ *при отрицательной и на* $1 - W_р$ *при положительной обратной*

связи:

$W_{zg} = W_п/(1 \pm W_р)$. (4.8)

В (4.8) $W_р$ — передаточная функция разомкнутой системы.

Вычисление передаточной функции многоконтурной системы.

Замкнутая система называется *многоконтурной,* если при ее размыкании получается цепь, содержащая параллельные или обратные связи; или замкнутая система называется многоконтурной, если она кроме главной обратной связи содержит параллельные или местные обратные связи (рис. 4.16). Многоконтурная система не имеет перекрещивающихся связей, если любые два контура, образованные параллельными или обратными связями, не имеют общих участков (рис. 4.16, *а)*

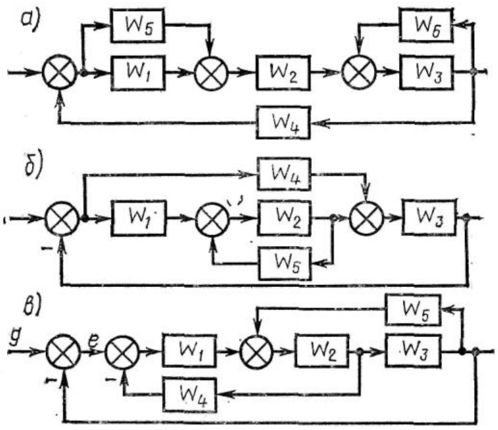


Схема для вычисления передаточной функции многоконтурной системы

Многоконтурная система имеет *перекрещивающиеся связи,* если какие-либо два контура, образованные параллельными или обратными связями, имеют общий участок, причем ни один из них не вложен внутрь другого (рис. 4.16, *в).* При вычислении передаточной функции нужно прежде всего освободиться от перекрещивающихся связей путем переноса и перестановки сумматоров и узлов. Затем, используя правила преобразования параллельного и обратного соединений, преобразовать.

Понятие об устойчивости. Определение устойчивости по Ляпунову.

Устойчивость является одним из основных требований, предъявляемых к системам автоматического уравнения (САУ). Неустойчивые САУ неработоспособны. Поэтому важно уметь определять (исследовать) и соответствующим выбором структуры и параметров системы обеспечивать ее устойчивость. В системе автоматического управления требуется поддерживать некоторое заданное движение, которое называется *невозмущенным движением.* Вследствие различных возмущающих воздействий фактическое движение отличается от требуемого невозмущенного движения. В нормально функционирующей системе это отличие, т. е. отклонение фактического движения от невозмущенного, должно быть небольшим. А это возможно только в устойчивой системе.

Существуют различные понятия устойчивости. Рассмотрим определения устойчивости, данные А. М. Ляпуновым. Пусть САУ описывается дифференциальным уравнением в нормальной форме $\dot{y}_i = Y_i(y_1, \ldots, y_n, t)$, $i = \overline{1, n}$, или в векторной записи:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(y, t), \qquad \textbf{(14)}$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{т}}$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^{\mathrm{т}}$ — вектор-столбцы (индекс «т» означает операцию транспонирования).

Обозначим $\mathbf{y}^0(t)$ невозмущенное движение. Оно является решением уравнения (5.1) при определенных начальных условиях. Решение уравнения (5.1) при любых других начальных условиях называется *возмущенным движением.*

Представим уравнение (14) в отклонениях $x_i = y_i - y_i^0$ $(i = \overline{1, n})$:

$$\dot{x} = X(x, t). \qquad \textbf{(15)}$$

В уравнении (5.2)

$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathrm{т}}$,

$X_i(\mathbf{x}, t) = Y_i(\mathbf{x} + \mathbf{y}^0, t) + \dot{y}_i^0$, $i = \overline{1, n}$.

В новых переменных невозмущенным движением является решение $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ уравнения (5.2) при нулевых начальных условиях. Любое другое решение $\mathbf{x}[\mathbf{x}(t_0), t]$, т. е. решение (5.2) при произвольном начальном значении $\mathbf{x}(t_0) \neq 0$, определяет возмущенное движение. Начальное значение $\mathbf{x}(t_0)$, отличное от нуля, *называется возмущением* или *начальным возмущением.*

Переменные $x_i(y_i)$, $i = \overline{1, n}$ называются *фазовыми координатами,* а х (у) — *фазовым вектором.* Пространство n-мерных векторов х (у) называется *фазовым пространством.*

Устойчивость по Ляпунову. Невозмущенное движение $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ называется *устойчивым по Ляпунову,* если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что при любых $t \geq t_0$

$$\| x[x(t_0),\ t] \| < \varepsilon, \qquad (16)$$

как только

$$\| x(t_0) \| < \delta. \qquad (17)$$

Здесь $\| x \|$ — длина вектора (евклидова норма): $\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$.

Иначе: невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ называется устойчивым, если, какова бы ни была сфера S_ε радиусом ε, можно указать такую сферу S_δ радиусом δ, что если движение $x[x(t_0), t]$ начинается внутри сферы S_δ, то в дальнейшем (при любых $t \geqslant t_0$) оно происходит внутри сферы S_ε .

Асимптотическая устойчивость. Невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ называется *асимптотически устойчивым* или *асимптотически устойчивым по Ляпунову,* если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, существует такое число $h > 0$, что при $\| x(t_0) \| < h$

$$\lim_{t \to \infty} x[x(t_0),\ t] = 0. \qquad (18)$$

Следовательно, для асимптотической устойчивости кроме выполнения условия устойчивости по Ляпунову требуется существование такой сферы S_h радиусом h, что если возмущенное движение начинается внутри сферы S_h, то оно со временем приближается к невозмущенному движению (в пределе при $t \to \infty$ совпадаетс ним).

Множество начальных точек $x(t_0)$, для которых выполняется условие (5.5), называется *областью притяжения невозмущенного движения (начала координат).* Иногда интерес может представлять устойчивость не только заданного движения, которое необходимо поддержать, но и таких движений, которые нужно подавлять. Поэтому в определении устойчивости под невозмущенным движением следует понимать любое рассматриваемое движение. Приведенные определения в равной мере относятся и к импульсным системам.

Определение и условие устойчивости линейных непрерывных систем.

Устойчивость линейных САУ. Если какое-либо решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами асимптотически устойчиво, то асимптотически устойчиво любое его решение. Поэтому в случае непрерывных линейных стационарных систем, т. е. систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, можно рассматривать их устойчивость, не указывая конкретного движения.

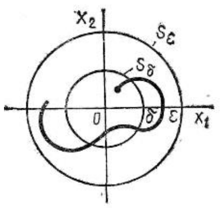


Схема для определения устойчивости по Ляпунову

Непрерывная линейная стационарная САУ называется устойчивой, если асимптотически устойчиво какое-либо ее невозмущенное (заданное) движение.

Если заданы внешние воздействия, то уравнение линейных стационарных САУ можно представить в виде

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)\,x = \varphi(t). \qquad \textbf{(19)}$$

В уравнении (19) a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$— заданные постоянные коэффициенты, $\varphi(t)$— заданная функция времени.

Общее решение уравнения (19), как известно, имеет вид

$$x(t) = x_в(t) + x_с(t), \qquad \textbf{(20)}$$

где $x_в$ (0 — частное решение неоднородного уравнения (5.6),.$x_с(t)$— общее решение однородного уравнения

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)\,x = 0. \qquad \textbf{(21)}$$

Частное решение $x_в(t)$ определяет *вынужденное движение,* решение $x_с(t)$— *свободное движение,* т. е. движение, которое не зависит от внешних воздействий и определяется только начальными условиями.

Невозмущенное движение задается внешним задающим воздействием и при отсутствии внешних возмущающих воздействий совпадает с вынужденным движением *$x_в$ (t).* Поэтому

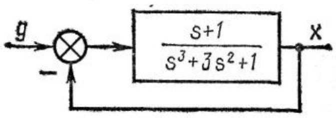


Схема замкнутой системы

линейная система устойчива, когда:

$$\lim_{t\to\infty} x_с(t) = 0. \qquad \textbf{(22)}$$

Это соотношение можно принять за определение устойчивости линейных непрерывных систем.

Характеристическое уравнение. Устойчивость линейной системы (5.6), т. е. выполнение условия (5.9), зависит от ее *характеристического уравнения*

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad \textbf{(23)}$$

Левая часть характеристического уравнения называется *характеристическим полиномом.* Характеристический полином системы (с точностью до постоянного множителя и обозначений переменной) совпадает с ее собственным оператором и знаменателем ее передаточной функции. Характеристический полином замкнутой системы также равен (при отрицательной обратной связи) сумме $P(s) + Q(s)$ полиномов числителя и знаменателя передаточной функции $W(s) = P(s)/Q(s)$ разомкнутой системы.

Необходимое и достаточное условие устойчивости. Если $\lambda_i, t = \overline{1, q},$— корни характеристического уравнения (5.10) кратности

$k_i\ (k_1 + k_2 + \ldots + k_q = n)$, то общее решение однородного уравнения

$$x_с(t) = \sum_{i=1}^{q} Q_i(t)\,e^{\lambda_i t}, \quad \textbf{(24)}$$

где $Q_i(t) = C_1^{(i)} + C_2^{(i)}t + \ldots + C_{k_i}^{(i)}t^{k_i - 1}$, $C_1^{(i)}, \ldots, C_{k_i}^{(i)}$ — постоянные интегрирования.

В частном случае, когда все корни λ_i, $i = \overline{1, n}$, простые, решение таково: $x_c(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}$.

Свободное движение (5.11) при $t \to \infty$ стремится к нулю при произвольных постоянных интегрирования в том случае, когда все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части.

Таким образом, *для того чтобы линейная непрерывная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части:* $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = \overline{1, q}$.

Корни характеристического уравнения, как и всякие комплексные числа, можно изобразить в виде точек на комплексной плоскости λ.откладывая по оси абсцисс $\operatorname{Re}\lambda$, а по оси ординат $\operatorname{Im}\lambda$ (мнимую часть). При этом все корни с отрицательной вещественной частью расположатся в левой полуплоскости. Поэтому условие устойчивости можно еще сформулировать так: *для того чтобы линейная непрерывная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были левыми, т. е. располагались в левой полуплоскости.*

Пример. Система первого порядка имеет характеристическое уравнение $a_0\lambda + a_1 = 0$. Его корень $\lambda_1 = -a_1/a_0$.Очевидно, он будет отрицательным и система устойчивой в том случае, когда оба коэффициента имеют одинаковый знак: или оба коэффициента положительны $(a_0 > 0,\ a_1 > 0)$, или оба коэффициента отрицательны $(a_0 < 0,\ a_1 < 0)$

Пример. Система второго порядка имеет характеристическое уравнение $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$. Его корни

$$\lambda_{1,2} = (-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2})/(2a_0).$$

Если $a_0 > 0$,то оба корня левые в том случае, когда $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$. Аналогично, если $a_0 < 0$,то оба корня левые в том случае, когда $a_1 < 0$ и $a_2 < 0$.

Из рассмотренных примеров следует, что *для устойчивости линейных непрерывных систем первого и второго порядков необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были одного знака (или все больше нуля, или все меньше нуля).* Это обстоятельство, очевидно, позволяет судить об устойчивости указанных систем без вычислений корней их характеристических уравнений.

Как известно из алгебры, для уравнений третьей и четвертой степеней имеются общие формулы для нахождения корней, а для уравнений пятой степени и выше таких формул нет. Но и в случае уравнений третьей и четвертой степеней исследование устойчивости путем определения корней неудобно, так как это требует громоздких вычислений. Поэтому для систем выше второго порядка особенно важны условия, которые позволяли бы судить об их устойчивости, не вычисляя корней характеристического уравнения. Такие условия называются *критериями устойчивости.*

Алгебраические критерии устойчивости непрерывных систем.

Алгебраическими критериями называются критерии, которые основаны на проверке определенных соотношений, составленных > из коэффициентов характеристического уравнения. Поэтому при использовании алгебраических критериев нужно иметь только характеристическое уравнение (5.10). Если исследование устойчивости проводится с помощью алгебраических критериев, нужно прежде всего проверить выполнение необходимого условия устойчивости, так как его проверка не требует никаких вычислений и при невыполнении этого условия дальнейших исследований проводить не нужно.

Необходимое условие устойчивости. *Для того чтобы система была устойчива, необходимо, чтобы коэффициенты ее характеристического уравнения были одного знака:*

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ \ldots,\ a_n > 0 \text{ или } a_0 < 0,\ a_1 < 0,\ \ldots,\ a_n < 0. \qquad \textbf{(24)}$$

Если необходимое условие не выполняется, то система неустойчива. Если же необходимое условие выполняется, то система при $n \geqslant 3$ *(n* — порядок системы) может быть устойчивой и неустойчивой и для установления устойчивости нужно воспользоваться каким-либо критерием устойчивости. Как уже установлено, в случае систем первого и второго порядков необходимое условие (5.12) является и достаточным.

Перейдем к формулировке критерия Гурвица. Составим из коэффициентов характеристического уравнения определитель n-го порядка

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix},$$

на главной диагонали которого располагаются коэффициенты в порядке возрастания их индексов, начиная с a_1 и кончая a_n. В каждом столбце при движении от элемента, находящегося на главной диагонали, вверх индексы коэффициентов возрастают, вниз —

убывают. При этом на место элементов с индексами, превышающими *n* (при движении вверх), и отрицательными индексами (при движении вниз) проставляются нули.

Приведем главные миноры определителя Д$_n$:

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \ \ldots$$

Назовем эти миноры, включая определитель Δ_n, *определителями Гурвица.* Примем для определенности $a_0 > 0$. Это допущение не нарушает общности, так как если $a_0 < 0$, то обе части характеристического уравнения можно умножить на —1.

Критерий Гурвица. *Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица, составленные из* *коэффициентов ее характеристического уравнения, были больше нуля* (при $a_0 > 0$): $\Delta_i > 0,\ i = \overline{1,\ n}$.

Из этого критерия следует, что при $n = 3$ необходимое и достаточное условие устойчивости имеет вид

$$a_0 > 0,\quad \Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0,\quad \Delta_3 = a_3\Delta_2 > 0.$$

Следовательно, уже при $n = 3$ необходимое условие устойчивости (5.12) не является и достаточным. Для устойчивости систем третьего порядка кроме необходимого условия (5.12) должно выполняться неравенство $\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0$ (т. е. разность между произведением средних коэффициентов и произведением крайних коэффициентов должна быть положительной).

Пример. Исследуем устойчивость системы (рис.) в разомкнутом и замкнутом состояниях. Характеристическое уравнение разомкнутой системы $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 1 = 0$. Необходимое условие не выполняется: при λ коэффициент $a_2 = 0$. Поэтому разомкнутая система неустойчива. Характеристическое уравнение замкнутой системы $\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$.

Необходимое условие устойчивости выполняется. Поэтому достаточно проверить условие (5.13): $\Delta_2 = 3\cdot 1 - 1\cdot 2 = 1 > 0$. Замкнутая система устойчива.

Критерий Льенара—Шипара. *При выполнении необходимого условия (5.12) для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы были положительны или все определители Гурвица с четными индексами, или все определители Гурвица с нечетными индексами.*

Следовательно, для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_0 > 0,\quad a_1 > 0,\quad \ldots,\quad a_n > 0;\quad \Delta_2 > 0,\quad \Delta_4 > 0,\quad \Delta_6,\ \ldots$$

или

$$a_0 > 0,\quad a_1 > 0,\quad \ldots,\quad a_n > 0;\quad \Delta_3 > 0,\quad \Delta_5 > 0,\quad \Delta_7 > 0,\ \ldots.$$

Таким образом, для исследования устойчивости нет необходимости вычислять все определители Гурвица.

Пример. Характеристическое уравнение системы $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + {}$ $+ 5 = 0$.

Необходимое условие устойчивости выполняется $(a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4,\ a_4 = 5)$. Согласно критерию Льенара—Шипара, для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: или $\Delta_2 > 0$ и $\Delta_4 > 0$ или $\Delta_3 > 0$. Проверим выполнение более простого второго условия:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\,(3\cdot 4 - 2\cdot 5) - 4\cdot 4 = -12 < 0.$$

Система неустойчива.

Частотные критерии устойчивости.

Частотными критериями называются критерии устойчивости, основанные на построении частотных характеристик и так называемой кривой Михайлова. Ниже рассмотрены следующие частотные критерии: критерий Михайлова, Найк-виста и логарифмический частотный критерий.

Пусть характеристический полином

$G(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$

Подставим в него $\lambda = j\omega$:

Кривую, которую

$G(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n.$

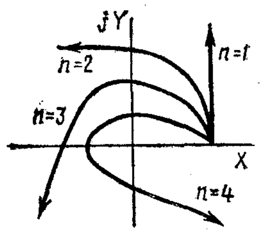


Схема для формулировки критерия Михайлова.

Критерий Михайлова. *Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы кривая Михайлова, начинаясь при $a_0 > 0$ с действительной положительной полуоси, при возрастании ω от 0 до ∞ последовательно обходила n квадрантов в положительном направлении, не попадая в начало координат (рис. 5.3).*

Пример. Характеристический полином $G(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2.$ Подставив в него $(\lambda = j\omega)$, получим

$G(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega), \quad X(\omega) = 2 - \omega^2, \quad Y(\omega) = \omega(1 - \omega^2).$

Составим таблицу:

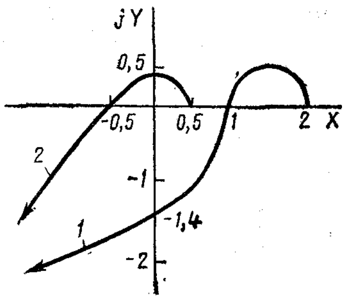
ω	0	$0 < \omega < 1$	1	$1 < \omega < \sqrt{2}$	2	$\omega > \sqrt{2}$	$\to \infty$
$X(\omega)$ $Y(\omega)$	2 0	> 0 > 0	1 0	> 0 < 0	0 —1,4	< 0 < 0	$\to -\infty$ $\to -\infty$

Построим кривую Михайлова. Система устойчива.

В пределах квадранта, вид кривой Михайлова на устойчивость не влияет, и она строится весьма приблизительно. Система неустойчива.

При формулировке алгебраических критериев и критерия Михайлова не имеет значения, какой системы (разомкнутой или замкнутой) исследуется устойчивость, т. е. рассмотренные критерии в равной мере применимы для исследования устойчивости разомкнутой и замкнутой систем. Критерий Найквиста предназначен для исследования только замкнутых систем. Он позволяет по виду амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы судить об устойчивости замкнутой системы. Дальше при

ω	0	$0<\omega<\sqrt{0,5}$	$\sqrt{0,5}$	$\sqrt{0,5}<\omega<1$	1	$\omega>1$	$\to\infty$
$X(\omega)$	0,5	>0	0	<0	—0,5	<0	$\to-\infty$
$Y(\omega)$	0	>0	0,35	>0	0	<0	$\to-\infty$



Кривые Михайлова.

формулировке частотных критериев принимается, что обратная связь системы отрицательна. Кроме того, если обратная связь положительна, то, умножив передаточную функцию разомкнутой системы на —1, можно сделать ее отрицательной.

Критерий Найквиста. *Пусть l* корней характеристического уравнения разомкнутой системы находятся в правой полуплоскости, а остальные $n - l$ корней — в левой полуплоскости. Тогда, *для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика ее разомкнутой системы с ростом частоты от* 0 *до* со *охватывала точку (*—1, j0) *в положительном направлении, т. е. против движения часовой стрелки, l/2 раз.*

В частности, *если разомкнутая система устойчива* (и, *следовательно,* $l = 0$)*, то, для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика ее разомкнутой системы не охватывала точку* (—1, j0).

Пример. Рассмотрим замкнутую систему (рис. 5.5, *а).* Частотная передаточная функция ее разомкнутой системы $W(j\omega) = U(\omega) +$
$+ jV(\omega)$

$U(\omega) = -2/(\omega^2 + 1),\ \ V(\omega) = -2\omega/(\omega^2 + 1).$

Составим таблицу:

Пример 5.7. Характеристический полином $G(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 0,5.$ Для $G(j\omega)$ имеем $G(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega),\ X(\omega) = 0,5 - \omega^2,\ \ Y(\omega) =$ $\omega(1 - \omega^2).$

Составим таблицу:

Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы охватывает точку $(-1,\ j0)$ в положительном направлении $^1/_2$ раз.

Характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет один правый корень, т. е. $l = 1$. Поэтому замкнутая система устойчива.

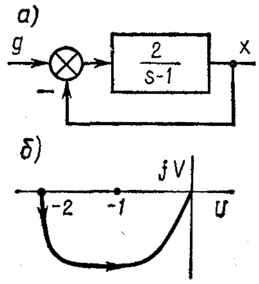


Рис. 5.5. Структурная схема и амплитудно-фазовая частотная ' характеристика.

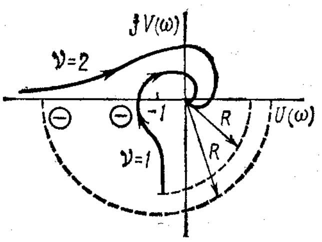


Рис. 5.6. Схема для формулировки критерия Найквиста

Если характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет ν $(\nu \geqslant 1)$ нулевых корней или, что то же, передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = kW_0(s)/s^{\nu},$$

где $W_0(0) = 1$, то система называется *астатической с астатизмом* ν*-го порядка.* При исследовании устойчивости астатических систем по критерию Найквиста амплитудно-фазовую частотную характеристику ее разомкнутой системы дополняют дугой $-\nu\pi/2$ бесконечно большого радиуса R (рис.) и ν корней, расположенных на мнимой оси, относят к левым корням.

Как следует из критерия Найквиста, на устойчивость замкнутой системы влияет не конкретный вид амплитудно-фазовой частотной характеристики ее разомкнутой системы, а только то, сколько раз она охватывает точку $(-1, j0)$. Но последнее можно установить по числу переходов (пересечений) амплитудно-фазовой частотной характеристики отрезка $(-\infty, -1)$ действительной оси [левее точки $(-1, j0)$]. Назовем *положительным переходом* (при возрастании частоты) переход сверху вниз [аргумент $\varphi(\omega)$ возрастает] и *отрицательным* — переход снизу вверх [аргумент $\varphi(\omega)$ убывает]. То, сколько раз амплитудно-фазовая частотная характеристика охватывает точку $(-1, j0)$ в положительном

ω	0	ω > 0	→ ∞
$U(\omega)$ $V(\omega)$	—2 0	< 0 < 0	→ 0 → 0

направлении, равно разности между числами положительных и отрицательных переходов на отрезке $(-\infty, -1)$. Поэтому критерий Найквиста можно сформулировать также следующим образом: *для того чтобы замкну-*

тая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числами положительных и отрицательных переходов амплитудно-фазовой частотной . характеристики разомкнутой системы отрезка $(-\infty, -1)$ *была равна* $l/2$ (l— число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы).

Используя связь между амплитудно-фазовой частотной характеристикой и логарифмическими частотными характеристиками,на основе критерия Найквиста нетрудно сформулировать логарифмический частотный критерий устойчивости.

При пересечении амплитудно-фазовой частотной характеристики отрезка

$(-\infty, -1)$ $A(\omega) > 1$ или $L(\omega) =$

$20 \lg A(\omega) > 0$ и $\varphi(\omega) = -(2i +$

$+ 1)\pi$, $i = 0, 1, \ldots$. Причем положительному переходу соответствует пересечение логарифмической фазовой частотной характеристики прямой $\varphi = = -(2i + 1)\pi$ снизу вверх, отрицательному — сверху вниз (рис. 5.7, б, в). Логарифмический частотный критерий. *Для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числами положительных и отрицательных переходов логарифмической фазовой частотной характеристики разомкнутой системы прямых* $\varphi(\omega) = -(2i +$

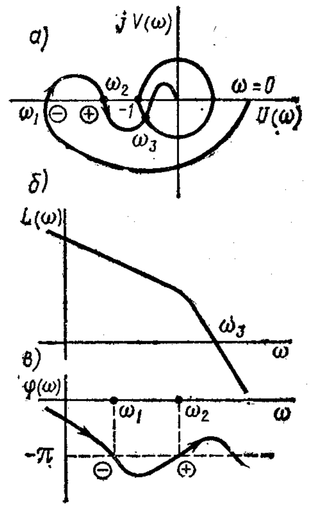


Схема для формулировки логарифмического частотного критерия.

$+ 1)\pi$ $(i = 0, 1, \ldots)$ *при частотах, при которых* $L(\omega) > 0$ *(логарифмическая амплитудная частотная характеристика положительна),* была равна $l/2$ (l — число

правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы).

Устойчивость систем с запаздыванием. Если система содержит звено чистого запаздывания, включенного последовательно с ее остальной частью, то передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(s) = W_0(s)\, e^{s\tau} = P(s)\, e^{-s\tau}/Q(s).$$

Наличие запаздывающего звена не влияет на характеристическое уравнение $Q(\lambda) = 0$ и соответственно на устойчивость разомкнутой системы. Характеристическое уравнение замкнутой системы $Q(\lambda) + P(\lambda)\, e^{-\lambda\tau} = 0$ становится трансцендентным и к нему непосредственно нельзя применить алгебраические критерии и критерий Михайлова. Критерий Найквиста (включая логарифмический частотный критерий) остается справедливым без изменений для систем с запаздыванием.

Частотная передаточная функция системы с чистым запаздыванием $W(j\omega) = |W_0(j\omega)|\, e^{j[\varphi(\omega) - \omega\tau]}$ отличается от частотной передаточной функции системы без чистого запаздывания $W_0(j\omega) = |W_0(j\omega)|\, e^{-j\varphi(\omega)}$ только дополнительным сдвигом фазы $\theta(\omega) = -\omega\tau$. Запаздывание может сделать устойчивую без запаздывающего звена систему неустойчивой.

Сравнительная характеристика алгебраических и частотных критериев устойчивости. Построение частотных характеристик является более трудоемким, чем вычисление определителей, необходимых для установления устойчивости. Поэтому если параметры системы фиксированы и нужно проверить только ее устойчивость, то, когда это возможно, лучше пользоваться алгебраическими критериями. Если система задается только частотными характеристиками, снятыми экспериментально, или она содержит звено чистого запаздывания, то следует воспользоваться частотными критериями, так как в этом случае алгебраические критерии непригодны.

Как показано в гл. 6, частотные характеристики позволяют судить и о качестве системы. И поэтому если кроме проверки устойчивости нужно оценить качество системы, то и в этом случае целесообразно использовать частотные критерии.

Методы выделения области устойчивости.

Критерии устойчивости позволяют характеризовать устойчивость системы, если все ее параметры фиксированы. Но часто приходится решать задачу, когда часть параметров системы не фиксирована и их (варьируемые параметры) нужно выбрать так, чтобы система была устойчива и выполнялись какие-либо дополнительные требования к ней. В этих случаях возникает необходимость определения множества всех тех значений варьируемых параметров, при которых система устойчива. Это множество называют *областью устойчивости* в пространстве параметров, т. е. во множестве различных значений варьируемых параметров.

Задачу выделения области устойчивости в простейших случаях можно решить, используя критерии устойчивости.

Граница устойчивости. Если часть корней характеристического уравнения находится на мнимой оси, а остальные корни — в левой полуплоскости, то считают, что система находится на границе устойчивости. Значения параметров, при которых система находится на границе устойчивости, называются *граничными.*

Чтобы найти граничные значения, можно воспользоваться любым из рассмотренных критериев устойчивости. При использовании алгебраических критериев нужно исходить из условия, что система находится на границе устойчивости, если часть коэффициентов и определителей Гурвица равна нулю, остальная часть — больше нуля. Поэтому для определения граничных значений варьируемых параметров нужно приравнивать нулю наиболее критичные коэффициенты и определители. Обычно среди коэффициентов таковыми являются a_0 и a_n, а среди определителей(пред— Δ_{n-1}

последний определитель Гурвица). Поэтому можно составить следующие три условия нахождения системы на границе устойчивости: 1) $a_0 = 0$; 2) $a_n = 0$; 3) $\Delta_{n-1} = 0$. После нахождения варьируемых параметров из этих уравнений нужно проверить остальные неравенства, входящие в условие устойчивости. Нужно, чтобы все они были больше нуля или равны нулю при найденных значениях варьируемых параметров. Только тогда найденные значения будут граничными.

Пример 5.9. Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид $\lambda^3 + \ + 3\lambda^2 + 3\lambda + k = 0$.

В этом случае $a_3 = k$. Другие коэффициенты не зависят от варьируемого

параметра. Для нахождения граничных значений k воспользуемся условиями $a_3 = 0$ и $\Delta_2 = 0$. Из условия $a_3 = 0$ получаем $k = 0$. При этом значении остальные неравенства $(a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0$ и $\Delta_3 > 0)$, входящие в условие устойчивости, выполняются. Из уравнения $\Delta_2 = 9 - k = 0$ получаем $k = 9$. Очевидно, и это значение является граничным. Область устойчивости $0 < k < 9$.

На основе критерия Найквиста и логарифмического частотного критерия для случая, когда характеристическое уравнение разомкнутой системы не имеет правых корней, можно сформулировать условия нахождения системы на границе устойчивости. Замкнутая система находится на границе устойчивости, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1) амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы проходит через точку $(-1,\ j0)$ и не пересекает отрезок

$(-\infty,\ -1)$;

2) логарифмическая фазовая частотная характеристика пересекает прямую $\varphi(\omega) = -(2i+1)\pi$ $(i = 0,\ 1,\ \ldots)$ при частоте среза w_c, при которой логарифмическая амплитудная частотная характеристика пересекает ось абсцисс $[L(\omega_c) = 0]$; при частотах, при которых логарифмическая амплитудная частотная характеристика положительна $[L(\omega) > 0]$, разность между числами положительных и отрицательных переходов логарифмической фазовой частотной характеристики прямой $\varphi(\omega) = -(2i+1)\pi$ $(i = \ =0,\ 1,\ \ldots)$ равна нулю.

D-разбиение. Структурная устойчивость. Коэффициенты характеристического уравнения системы зависят от ее параметров. Если зафиксировать параметры (варьируемые), т. е. выбрать в пространстве параметров определенную точку, то коэффициенты и, следовательно, корни характеристического уравнения примут определенные значения. Иначе: каждой точке пространства параметров соответствует определенное расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости. Обозначим *D (k)* множество всех точек пространства параметров, которым соответствует такое расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости, при котором *k* корней находятся в левой полуплоскости и соответственно остальные *n* — k-корней — в правой полуплоскости.

Разбиение пространства параметров на области *D (k) (k* = 0, 1, ..., *n)* называется *D-разбиением.*

В общем случае пространство параметров разбивается на *n* + 1 областей *D (k)* : D (0), D (1), ..., *D (n).* Очевидно, области устойчивости соответствует область *D (n).* В конкретных случаях некоторые из областей *D (k)* могут отсутствовать. В частности, может отсутствовать область устойчивости *D (n);* это означает, что при заданной структуре и выбранных значениях фиксированных параметров система неустойчива при любых возможных значениях варьируемых параметров. В таких случаях считают, что система структурно неустойчива или система структурно неустойчива относительно рассматриваемых варьируемых параметров.

Иначе: система называется *структурно неустойчивой или структурно неустойчивой относительно рассматриваемых варьируемых параметров, если при заданной структуре и выбранных значениях фиксированных параметров она неустойчива при любых возможных значениях варьируемых параметров.*

Чтобы добиться устойчивости структурно неустойчивой системы, нужно изменить структуру системы или подобрать другие значения фиксированных параметров. Если в пространстве параметров существует область устойчивости, то система называется *структурно устойчивой.*

Метод D-рразбиения. *Методом D-разбиения* называется метод выделения области устойчивости, основанный на D-разбиении. Этот метод включает следующие три операции:

1. Производится D-разбиение пространства параметров.
2. Среди областей *D (k)* определяется область, имеющая наибольший индекс *k.* Эта область называется *областью-претендентом,* так как только эта область может быть областью устойчивости.
3. Проверяется, является ли область-претендент областью устойчивости.

Порядок D-разбиения и выделения области-претендента зависит от числа варьируемых параметров. Проверка, является ли область-претендент областью устойчивости, независимо от числа варьируемых параметров производится следующим образом. Выбирается какая-либо точка из области-претендента и при значениях варьируемых параметров, соответствующих выбранной точке, проверяется устойчивость системы. Область-претендент является областью устойчивости в том случае, если система при этом устойчива. Если система структурно устойчива, то область-претендент всегда является областью устойчивости.

Выделение области устойчивости на плоскости одного параметра. Параметры системы могут принимать только действительные значения, и пространство параметров в случае одного варьируемого параметра представляет собой прямую, а область устойчивости — интервал. При выделении интервала устойчивости методом D-разбиения сначала находят область устойчивости на комплексной плоскости, считая, что параметр может принимать комплексные значения. Определив область устойчивости на комплексной плоскости, нетрудно выделить интервал устойчивости.

Пусть варьируемый параметр $\bar{\mu}$ входит линейно в характеристическое уравнение $Q(\lambda) + \mu R(\lambda) = 0$.

Здесь $Q(\lambda)$ и $R(\lambda)$— полиномы относительно λ.

Решим это уравнение и сделаем подстановку

$\lambda = j\omega$:

$$\bar{\mu} = -Q(j\omega)/R(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega). \qquad (25)$$

В уравнении (25) $\bar{\mu}$ —комплексное число. Это уравнение называется *уравнением кривой D-разбиения.* Задаваясь значением со от $-\infty$ до ∞, по уравнению (25) строится кривая, которая

производит D-разбиение. В (25) *u* является четной, а $v(\omega)$ — нечетной функцией. Поэтому достаточно построить часть кривой D-разбиения, соответствующую положительным значениям со, а затем зеркально отобразить относительно действительной оси.

Для выделения области-претендента кривую D-разбиения штрихуют: при движении по этой кривой в направлении возрастания со штрих наносят с левой стороны (рис). Затем полагают, что

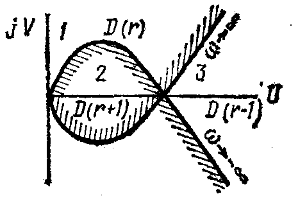


Рис. D-разбиение

какая-либо область, например область, имеет индекс r. Индексы остальных областей определяются однозначно по следующему правилу: при переходе из одной области в другую индекс увеличивается на единицу, если граница пересекается по направлению штриховки (переход из области 1 в область *2),* и уменьшается на единицу, если граница пересекается против штриховки (переход из области 1 в область *3).*

Пример 5.10. Пусть характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + k = 0$.

Решив его относительно k и сделав подстановку $\lambda = j\omega$, получим $\bar{k} = j\omega^3 + 2\omega^2 - j\omega$, $u(\omega) = 2\omega^2$, $v(\omega) = \omega(\omega^2 - 1)$.

Составим таблицу:

ω	0	$0<\omega<1$	1	$\omega>1$	$\to\infty$
$u(\omega)$	0	>0	2	>0	$\to\infty$
$v(\omega)$	0	<0	0	>0	$\to\infty$

Построим кривую D-разбиения, нанесем штриховку и произведем индексацию областей (рис. 5.8). Областью-претендентом является область $D(r+1)$. Как легко проверить, эта область является областью устойчивости. Поэтому интервалом устойчивости является интервал (0, 2).

Типовые воздействия. Показатели качества.

Устойчивость является необходимым, но недостаточным условием работоспособности систем автоматического управления. К ним предъявляются определенные требования качества. Наиболее полной

характеристикой качества систем автоматического управления является текущая ошибка $e'(t) = x(t) - x^0(t)$ или

$$e(t) = x^0(t) - x(t), \qquad (26)$$

где $x^0(t)$— заданное (невозмущенное) движение; $x(t)$— фактическое (возмущенное) движение.

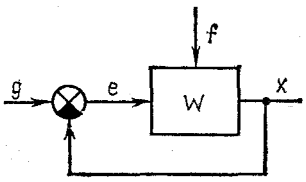


Рис. Схема замкнутой системы с двумя внешними воздействиями

Ошибки $e'(t)$ и $e(t)$ отличаются только знаком. Использование ошибки $e(t)$, определяемое соотношением (26), связано с тем, что при $x^0(t) = g(t)$ [$g(t)$— задающее воздействие] она совпадает с величиной на выходе сравнивающего устройства, если к нему не приложено возмущение.

Пусть на систему действуют два внешних воздействия: задающее воздействие g(*t)* и возмущение f(*t)* (рис), причем $x^0(t) \equiv g(t)$. Так как $x(t) = W_{xg}(p)\, g(t) + W_{xf}(p)\, f(t)$,

то

$$e(t) = g(t) - x(t) = W_{eg}(p)\, g(t) - W_{xf}(p)\, f(t), \qquad (27)$$

Где $W_{eg}(p) = 1 - W_{xg}(p)$

Напомним, что $W_{xg}(p)$, $W_{xf}(p)$, $W_{eg}(p)$ — передаточные функции системы (в операторной форме), причем первый индекс снизу указывает на выходную, а второй индекс — на входную величины, относительно которых определяются эти передаточные функции.

Представим ошибку в виде суммы $e(t) = e_g(t) + e_f(t)$, где $e_g(t)$ — ошибка, обусловленная входным задающим воздействием $g(t)$ (ошибка от задающего воздействия); $e_f(t)$— ошибка, обусловленная входным возмущением $f(t)$ (ошибка от возмущения). Ошибки от задающего воздействия и возмущения определяются независимо друг от друга: при определении $e_g(t)$ можно принять $f(t) = 0$, а при определении $e_f(t)$— воздействие

Из (27) следует, что

$g(t) = 0.$

$$e_g(t) = W_{eg}(p)\, g(t); \qquad (28)$$

$$e_f(t) = -W_{xf}(p) f(t). \quad (29)$$

Если возмущение / приложено не в точке приложения задающего воздействия, то ошибку от возмущения можно также определить по формуле

$$e_f(t) = W_{ef}(p) f(t). \quad (30)$$

Если возмущение приложено в одной точке с задающим воздействием, то по формуле (6.5) определяется не ошибка от возмущения, а разность:

$$f(t) - W_{xf}(p) f(t) = [1 - W_{xf}(p)] f(t).$$

Типовые воздействия. Ошибка *e (t)* зависит как от свойства системы, так и от вида входных воздействий . Для одной и той же системы она различна в зависимости от входных воздействий. Поэтому при определении качества системы используют так называемые *типовые воздействия,* в качестве которых обычно принимают ступенчатое воздействие $A_0 1(t)$, линейно изменяющееся воздействие $A_1 t$, гармоническое воздействие $A \sin \omega t$ и др.

Качество системы в переходном и установившемся режимах. Различают качество системы в переходном и установившемся режимах. Под качеством системы в *переходном режиме* понимают свойство системы на начальном отрезке времени $[t_0, t]$ (t_0— момент приложения на систему воздействия); под качеством системы *в установившемся режиме* — свойство системы в асимптотике при $t \to \infty$.

Для оценки качества в переходном режиме используют ступенчатое воздействие $A_0 1(t)$. Вид кривой переходного процесса не зависит от величины A_0; обычно принимают $A_0 = 1$. При этом

$$e_g(t) = 1(t) - h_g(t), \quad e_f(t) = -h_f(t),$$

где $h_g(t)$ и $h_f(t)$ — переходные функции [$h_g(t) = x(t)$ при $g(t) = 1(t)$ и $f(t) = 0$; $h_f(t)$ при $f(t) = 1(t)$ и $g(t) = 0$].

Из приведенных соотношений видно, что о качестве системы в переходном режиме можно судить по переходным функциям $h_g(t)$ и $h_f(t)$ или переходным характеристикам.

Показатели качества. Оценивать качество систем и сравнивать их между собой по текущим ошибкам и переходным функциям неудобно. Поэтому для оценки качества систем используют числовые показатели, которые называют *показателями качества* и которые так или иначе определяют характерные свойства ошибок и переходных характеристик.

Показатели качества в переходном режиме делятся на прямые и косвенные. *Прямыми* называются показатели качества, которые определяют непосредственно по переходной характеристике. Все остальные показатели качества называют *косвенными.*

Изложенные здесь понятия и определения для непрерывной системы в равной степени относятся и к импульсным системам.

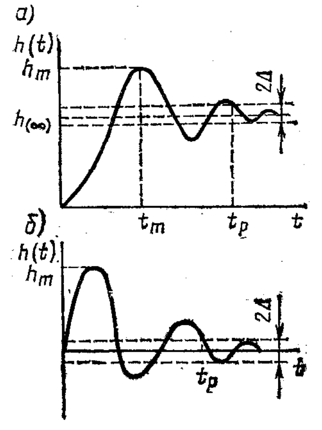
Показатели качества в переходном режиме и их вычисление в случае непрерывных систем.

Прямые показатели качества. Из прямых показателей качества наиболее часто используются время регулирования и перерегулирование.

Временем регулирования t_p называется минимальное время, по истечении которого (с момента подачи ступенчатого воздействия) отклонение выходной величины от установившегося значения

не превышает некоторой заданной величины Δ. Обычно принимают $\Delta =$ = $(0{,}05 \div 0{,}1)\ h(\infty)$, где $h(\infty)$— установившееся значение переходной характеристики. Для определения времени регулирования t_p нужно провести по обе стороны от прямой $h(t) = h(\infty)$ на одинаковом расстоянии Δ прямые, параллельные оси абсцисс (рис. 6.2, *а)*. Время регулирования—это время, когда переходная характеристика в последний раз пересекает любую из проведенных прямых.

Перерегулирование обозначают о и определяют следующим образом:



Переходные характеристики.

$\sigma = \{[h_m - h(\infty)]/h(\infty)\}\ 100\ \%$ где h_m— максимальное значение переходной функции (рис. 6.2, *а)*. Если кривая переходного процесса, вызванного ступенчатым • возмущающим воздействием $f(t) = A_0 1(t)$, имеет вид, показанный на рис. 6.2, б $[h(\infty) = 0]$, то перерегулирование можно определить как максимальное отклонение h_m, выраженное в процентах от A_0:

$$\sigma = (h_m/A_0)100\%.$$

Постоянную Δ, которая входит в определение времени регулирования, в этом случае можно вычислить, используя A_0: $\Delta = (0{,}05 \div 0{,}1)\ A_0$.Порядок построения переходной характеристики не зависит от места приложения входного воздействия. Поэтому достаточно рассматривать, как строится переходная характеристика при действии какого-либо одного воздействия, например задающего.

Если дано дифференциальное уравнение системы

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)\,x = (b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m)\,g,\ m \leqslant n,$$

то, по определению, переходная функция — это решение этого уравнения при $g = 1(t)$ и нулевых начальных условиях:

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0.$$

Решение удобно находить с помощью преобразования Лапласа. По дифференциальному уравнению или структурной схеме нетрудно получить уравнение системы в изображениях Лапласа:

$$X(s) = W_{xg}(s)\,G(s).$$

Так как при $g(t) = 1(t)$ изображение $G(s) = 1/s$ и $X(s) = H(s)$ ($H(s) = L\{h(t)\}$), то $H(s) = W_{xg}(s)/s$. Пусть $H(s) = A(s)/B(s)$ — дробно-рациональная функция. Если полюсы s_i, $i = 1, n$, этой функции простые, то, по известной теореме разложения,

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A(s_i)}{B'(s_i)} e^{s_i t}, \qquad \textbf{(31)}$$

где $B'(s_i) = [dB(s)/ds]|_{s=s_i}$.

Если полюсы s_i, $i = \overline{1, q}$, функции Я (s) являются кратными и имеют кратность k_i ($k_1 + k_2 + \ldots + k_q = n$), то

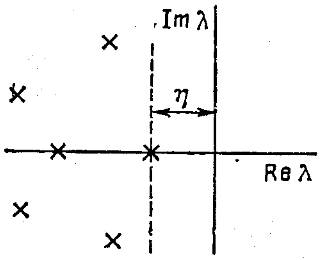
$$h(t) = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{(k_i - 1)!} \lim_{s \to s_i} \frac{d^{k_i - 1}}{ds^{k_i - 1}} \left[(s - s_i)^{k_i} \times \frac{A(s)}{B(s)} e^{st} \right]. \qquad \textbf{(32)}$$

Косвенные показатели качества. Построение переходной характеристики является трудоемким процессом. Кроме того, по ней в общем случае трудно выявить влияние значений отдельных параметров системы на ее показатели качества. Поэтому использование прямых показателей для оценки качества не всегда удобно. Прямые показатели особенно неудобны, когда параметры системы не фиксированы и их нужно выбрать так, чтобы удовлетворить заданным требованиям к ее качеству. В последнем случае удобны косвенные показатели качества, которые делятся на корневые, частотные и интегральные.

Корневые показатели качества. Качество системы можно рассматривать, когда система устойчива, т. е. когда все корни характеристического уравнения системы являются левыми.

К корневым показателям качества относятся степень устойчивости и колебательность.

Степенью устойчивости называется расстояние от мнимой оси до



К определению степени устойчивости.

ближайшего корня (рис. 6.3):

$$\xi = \min_{\nu} |\operatorname{Re} \lambda_\nu|,$$

где λ_ν — корни характеристического уравнения.

Она характеризует быстродействие системы. При прочих равных условиях чем больше ξ, тем быстрее затухает переходный процесс. Установить, обладает ли система заданной степенью устойчивости ξ_0, не вычисляя корней характеристического уравнения, можно следующим образом. В исходное характеристическое уравнение

$$G(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

подставляют $\lambda = q - \xi_0$ (это преобразование соответствует перемещению мнимой оси влево на ξ_0) и получают *смещенное характеристическое уравнение*

$$\tilde{G}(q) = G(q - \xi_0) = A_0q^n + A_1q^{n-1} + \ldots + A_n = 0. \quad \textbf{(33)}$$

Если все корни уравнения (6.8) находятся в левой полуплоскости (выполняется для этого уравнения условие устойчивости), то степень устойчивости больше ξ_0; если имеются правые корни, степень устойчивости меньше ξ_0; в граничном случае степень устойчивости равна ξ_0.

Колебательность μ определяется следующим образом:

$$\mu = \max_{\nu} |\operatorname{Im}\lambda_\nu / \operatorname{Re}\lambda_\nu|.$$

Значение μ является мерой склонности системы к колебаниям.

Частотные показатели качества. Из частотных показателей обычно используются запасы устойчивости по амплитуде и фазе. Эти показатели определяются по амплитудно-фазовым и логарифмическим частотным характеристикам. По логарифмическим частотным характеристикам запас *устойчивости по амплитуде* и *запас устойчивости по фазе* определяются следующими соотношениями:

$$\Delta L = |20 \lg A(\omega_\pi)|, \quad \gamma = \pi + \varphi(\omega_c),$$

где ω_π — частота, при которой сдвиг фазы $\varphi(\omega_\pi) = -\pi$; ω_c — частота среза.

Для определения запасов устойчивости по амплитудно-фазовой частотной характеристике нужно провести окружность единичным радиусом (рис. 6.5). Запасы устойчивости по амплитуде и фазе показывают склонность системы к колебаниям: чем меньше эти показатели, тем медленнее затухает переходный процесс, который при малых запасах устойчивости имеет явно выраженный колебательный характер.

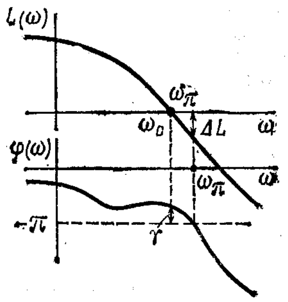


Схема для определения запасов устойчивости по логарифмической частотной характеристике

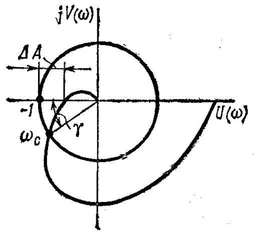


Схема для определения запасов устойчивости по амплитудно-фазовой частой характеристике

Интегральные показатели качества. Ошибку системы можно представить в виде суммы:

$$e(t)=e_{п}(t)+e_{\infty},$$

где e_{∞} — установившаяся ошибка; $e_{п}(t)$ — переходная составляющая ошибки. При $g(t)=1(t)$ $[f(t)=0]$

$$e_{\infty}=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim[1(t)-h(t)]=1(t)-h(\infty);$$

$$e_{п}(t)=e(t)-e_{\infty}=h(\infty)-h(t).$$

Если переходная характеристика является монотонной, то в качестве числовой характеристики переходной составляющей ошибки можно использовать значение заштрихованной площади (рис. 6.6, *а),* т. е. интеграл $J_1=\int_0^{\infty} e_{п}(t)\,dt$. Очевидно, чем меньше J_1, тем выше качество системы. Показатель J_1 не может служить мерой качества системы, если ее переходный процесс является колебательным, так как площади, расположенные по разные стороны от прямой $h(t)=h(\infty)$, вычитаются (рис. 6.6, *б).* Поэтому обычно используются *квадратичные интегральные показатели (квадратичные интегральные оценки)*

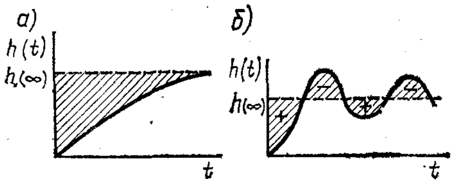


Схема для определения интегральных оценок

$$J_0=\int_0^{\infty} e_{п}^2(t)\,dt; \quad \textbf{(34)}$$

$$J_{01}=\int_0^{\infty} [e_{п}^2(t)+\tau^2\dot{e}_{п}^2(t)]\,dt$$

Вычисление квадратичных интегральных оценок. Если $X(s)$ — изображение по Лапласу от функции $x(t)$ и все особые точки $X(s)$ расположены слева от мнимой оси, то справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} x^2(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad \textbf{(35)}$$

при условии, что слева интеграл сходится (существует). Действительно,

$$\int_0^{\infty} x^2(t)\,dt=\int_0^{\infty} x^2(t)\,e^{-st}\,dt\,|_{s=0}.$$

Используя формулу обратного преобразования Лапласа

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(q)\,e^{qt}\,dq,$$

получаем

$$\int_0^\infty x^2(t)\,e^{-st}\,dt\,|_{s=0}=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\left\{X(q)\int_0^\infty x(t)\,e^{-(s-q)t}\,dt\right\}dq\,|_{s=0}=$$

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(q)\,X(s-q)\,dq\,|_{s=0}=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(q)\,X(-q)\,dq.$$

Если все особые точки функции $X(q)$ расположены левее мнимой оси, то, положив с = 0 и $q=j\omega$, ' получим формулу (6.11). Используя соотношение (6.11), для квадратичной интегральной оценки (6.9) имеем

$$J_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|E_п(j\omega)|^2\,d\omega, \quad \textbf{(36)}$$

где $E_п(s)$ — изображение по Лапласу от ошибки $e_п(t)$.

Если $E_п(s)$ является дробно-рациональной функцией вида

$$E(s)=(b_0 s^{n-1}+b_1 s^{n-2}+\ldots+b_{n-1})/(a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_n),$$

то определение показателя J_0 сводится к вычислению интеграла

$$I_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{b_0(j\omega)^{n-1}+b_1(j\omega)^{n-2}+\ldots+b_{n-1}}{a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_n}\right|d\omega, \quad \textbf{(37)}$$

для которого имеется выражение, непосредственно связывающее I_n с коэффициентами a_i, $i=0, 1, \ldots, n$ и b_k, $k=0, 1, \ldots, n-1$. Приведем эти выражения для n — 1, 2, 3:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{для } n=1 \\
\qquad I_1=b_0^2/(2a_0a_1); \\
\text{для } n=2 \\
\qquad I_2=(b_0^2a_2+b_1^2a_0)/(2a_0a_1a_2); \\
\text{для } n=3 \\
I_3=[b_0^2a_2a_3+(b_1^2-2b_0b_2)\,a_0a_3+b_2^2a_0a_1]/[2a_0a_3\,(a_1a_2-a_0a_3)].
\end{array}\right\} \quad \textbf{(38)}$$

Для квадратичной интегральной оценки (6.10) с помощью соотношения (6.11) можно получить выражение

$$J_{01}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|E_п(j\omega)|^2\,d\omega+\frac{\tau^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|j\omega E_п(j\omega)-e_п(0)|^2 d\omega. \quad \textbf{(39)}$$

Поэтому если $E_п(s)$ является дробно-рациональной функцией, то и для вычисления показателя J_{01} можно использовать формулы (38).

Оценка качества непрерывных систем в установившемся режиме. Коэффициенты ошибок.

Наиболее полной характеристикой качества системы в установившемся режиме является ошибка

$$e_\infty = \lim_{t \to \infty} e(t) = e(t) - e_п(t).$$

Если к системе приложено два воздействия и более, то при вычислении ошибки удобно использовать принцип суперпозиции, т. е. вычислять установившиеся ошибки от каждого воздействия отдельно, а затем их складывать.

Коэффициенты ошибок. Числовыми характеристиками качества системы в установившемся режиме являются коэффициенты ошибок. Коэффициенты ошибок по задающему воздействию определяются следующим образом. Представим установившуюся ошибку от задающего воздействия в виде ряда

$$e_{g\infty}(t) = C_{g0}g(t) + \frac{C_{g1}}{1!}\frac{dg(t)}{dt} + \frac{C_{g2}}{2!}\frac{d^2g(t)}{dt^2} + \ldots \quad \textbf{(40)}$$

Коэффициенты $C_{gi},\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, вычисляемые по формулам

$$C_{g0} = W_{eg}(0), \quad C_{gi} = [d^iW_{eg}(s)/ds^i)]|_{s=0}, \quad \textbf{(41)}$$

называют *коэффициентами ошибок* или *коэффициентами ошибок по задающему воздействию.* Аналогично определяются коэффициенты ошибок по другим воздействиям.

Наиболее часто используют первых три коэффициента, и они имеют специальные названия: C_{g0} — *коэффициент позиционной ошибки,* C_{g1} — *коэффициент скоростной ошибки,* C_{g2} — *коэффициент ошибки по ускорению.*

Формулы выводят таким образом. Из соотношения

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE_g(s)$$

следует, что установившейся ошибке $e_{g\infty}(t)$ соответствует изображение $E_g(s)$ в окрестности точки Поэтому $s = 0$. при вычислении $e_{g\infty}(t)$ по изображению

$$E_g(s) = W_{eg}(s)\,G(s)$$

передаточную функцию $W_{eg}(s)$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности нуля. Тогда

$$E_g(s) = \left(C_{g0} + \frac{C_{g1}}{1!}s + \frac{C_{g2}}{2!}s^2 + \ldots + \right)G(s),$$

откуда, переходя к оригиналам, получаем разложение (6.16), что и доказывает справедливость формул (41).

Статические и астатические системы. Система называется статической или статической по воздействию *g,* если $C_{g0} \neq 0$. Система называется астатической, если $C_{g0} = 0$. При постоянном внешнем воздействии $g = g_0$ установившаяся ошибка по (40)

$$e_{g\infty}(t) = C_{g0}g_0, \quad \textbf{(42)}$$

и в статических системах она отлична от нуля, а в астатических системах равна нулю. Установившаяся ошибка при постоянных внешних воздействиях называется статической. Поэтому статические и астатические системы обычно определяются следующим образом: *система называется статической, если статическая ошибка отлична от нуля, и астатической, если статическая ошибка равна нулю.*

По определению астатическая система обладает *астатизмом r-го порядка,* если первые r коэффициентов ошибок равны нулю, а (r + 1)-й коэффициент отличен от нуля:

$$C_{g0}=C_{g1}=\ldots=C_{gr-1}=0, \quad C_{gr}\neq 0. \quad \textbf{(43)}$$

Если $C_{g0}=0$, то, по определению производной,

$$C_{g1}=\lim_{s\to 0}\frac{W_{eg}(s)-W_{eg}(0)}{s-0}=\lim_{s\to 0}\frac{W_{eg}(s)}{s}.$$

Если $C_{g0}=C_{g1}=\ldots=C_{gr-1}=0$, то можно показать, что

$$C_{gi}=\lim_{s\to 0}\frac{i!W_{eg}(s)}{s^i}, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ r. \quad \textbf{(44)}$$

Обычно бывает достаточно вычислить только первый отличный от нуля коэффициент ошибок. В этих случаях следует пользоваться соотношениями (6.20), так как они намного проще формул (6.17) (не требуется вычислять производных).

Пример 6.5. Пусть передаточная функция разомкнутой системы $W(s)=k/s(s+1)$. Передаточная функция замкнутой системы

$$W_{eg}(s)=1/[1+W(s)]=s(s+1)/[s(s+1)+k].$$

Коэффициент позиционной ошибки $C_0=W_{eg}(0)=0.$ Коэффициент скоростной ошибки.

$$C_{g1}=\lim_{s\to 0}\frac{W_{eg}(s)}{s}=1/k.$$

В астатической системе, имеющей астатизм r-го порядка, первый отличный от нуля коэффициент ошибок $C_{gr}=r!/k.$ Если задающее воздействие $g_0=A_1t,$ то ошибка [по (6.16)]$e_\infty(t)=\ =C_{g0}A_1t+C_{g1}A_1$ в статической системе бесконечно возрастает. Поэтому статическая система непригодна для воспроизведения линейно изменяющегося задающего воздействия. Как нетрудно показать, если задающее воздействие является полиномом, то установившаяся ошибка конечна, если порядок астатизма системы равен порядку полинома, и равна нулю, если порядок астатизма больше порядка полинома.

Структура астатической системы. Так как передаточная функция ошибки от задающего воздействия $W_{eg}(s)=1/[1+W(s)],$
то коэффициент позиционной ошибки $C_{g0}=W_{eg}(0)=0,$ если

$W(0)=\infty,$ т. е. передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s)=(k/s^\nu)W_0(s), \quad \textbf{(45)}$$

где $\nu\geqslant 1,\ W_0(0)=1.$

Иначе: система является астатической по задающему воздействию в том случае, если она содержит интегрирующее звено. Система обладает астатизмом r-го порядка, только в том случае, когда передаточная функция разомкнутой системы имеет вид (6.21) и $\nu=r$. Другими словами, система обладает астатизмом r-го порядка, если она содержит r последовательно соединенных интегрирующих звеньев.

Примечание. Выше принималось, что $W_{eg}(s) = 1/[1 + W(s)]$. Это справедливо, если задающее воздействие подается только на сравнивающее устройство. Если задающее воздействие подается и на другой элемент (рис. 6.7), то указанная формула неверна:

$$W_{eg} = 1 - W_{xg} = 1 - \frac{(W_1 + W_3) W_2}{1 + W} = \frac{1 - W_2 W_3}{1 + W}, \quad W = W_1 W_2.$$

Рассмотрим, когда система является астатической по возмущающему воздействию. Передаточная функция ошибки от возмущения замкнутой системы (рис. 6.8)

$$W_{xf} = W_2/(1 + W_1 W_2) = 1/[(1/W_2) + W_1].$$

Коэффициент позиционной ошибки $C_{f0} = W_{xf}(0) = 0$, если $W_1(0) = \infty$. Последнее возможно, если передаточная функция имеет вид

$$W_1(s) = (k/s^{\nu}) W_{10}(s),$$

где $\nu \geqslant 1$, $W_{10}(0) = 1$.

Первые m коэффициентов ошибок от возмущения равны нулю в том случае, если в последнем выражении $\nu = r$.

Таким образом, *система является астатической по возмущению и обладает астатизмом r-го порядка в том случае, если r последовательно соединенных интегрирующих звеньев включены между сравнивающим звеном и точкой приложения возмущения.*

Пример 6.6. Найдем установившуюся ошибку системы (рис. 6.8) при следующих исходных данных: $W_1 = 10$, $W_{2(s)} = 1/s(s + 1)$, $g = \alpha t$, $f = b$.

Передаточные функции ошибок:

$$W_{eg}(s) = \frac{s(s+1)}{s(s+1)+10}, \quad W_{ef}(s) = -W_{xf}(s) = \frac{1}{s(s+1)+10}.$$

Коэффициенты ошибок:

$$C_{g0} = W_{eg}(0) = 0; \quad C_{g1} = 1/10, \quad C_{f0} = W_{ef}(0) = -1/10.$$

Составляющие установившейся ошибки:

$$e_{g\infty} = C_{g0}\alpha t + C_{g1}\alpha = \alpha/10, \quad e_{f\infty} = -(1/10)\, b.$$

Установившаяся ошибка

$$e_{\infty} = e_{g\infty} + e_{f\infty} = (\alpha - b)\, 10.$$

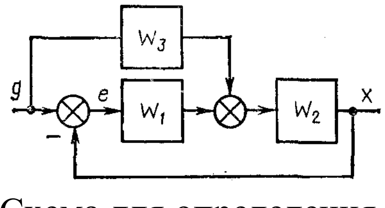
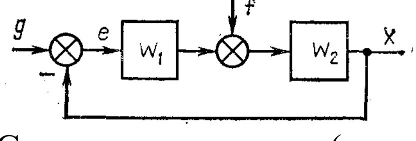


Схема для определения передаточной функции ошибки по задающему воздействию.



Структурная схема (к примеру 6.7)

Оценка качества непрерывных систем при случайных воздействиях.

Условимся случайные процессы (случайные функции времени) обозначать прописными буквами, а их реализации — соответствующими строчными буквами. Если внешние воздействия являются случайными процессами, то ошибка $E(t) = X^0(t) - X(t)$, определяемая как разность между заданным (невозмущенным) $X^0(t)$ и фактическим (возмущенным) движениями, является также случайным процессом. Поэтому для оценки качества (точности) системы при случайных воздействиях используются следующие характеристики случайного процесса E (t):

$$m_e = ME, \quad \sigma_e = \sqrt{D_e}, \tag{46}$$

где M — операция математического ожидания; D_e — дисперсия.

Среднее значение (математическое ожидание) m_e называется систематической ошибкой, среднеквадратическое отклонение σ_e — среднеквадратической ошибкой.

Если к системе приложено несколько воздействий, то систематическая ошибка всегда равна сумме ошибок от каждого воздействия отдельно, а дисперсия ошибок (не среднеквадратическая ошибка) равна сумме дисперсий ошибок от каждого воздействия отдельно, если воздействия независимы или не коррелированны между собой.

Рассмотрим, как определяются систематическая ошибка и дисперсия ошибки (среднеквадратическая ошибка) от какого-либо одного воздействия, например задающего воздействия $G(t)$.

Определение ошибок в переходном режиме. Если на вход системы подается реализация $g(t)$, то ошибка

$$e(t) = \int_0^t w_{eg}(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

Так как случайный процесс можно представить как совокупность реализаций, то, подставив в это выражение $G(t)$ вместо $g(t)$, получим

$$E(t) = \int_0^t w_{eg}(t-\tau)\, G(\tau)\, d\tau. \tag{47}$$

Используя это соотношение, для систематической ошибки, корреляционной функции и дисперсии получаем:

$$m_e(t) = \int_0^t w_{eg}(t-\tau)\, m_g(\tau)\, d\tau; \quad (47)$$

$$R_e(t, t') = \int_0^t \int_0^{t'} w_{eg}(t-\tau)\, w_{eg}(t'-\tau')\, R_g(\tau, \tau')\, d\tau\, d\tau'; \tag{48}$$

$$D_e(t) = R_e(t, t) = \int_0^t \int_0^t w_{eg}(t-\tau)\, w_{eg}(t-\tau')\, R_g(\tau, \tau')\, d\tau\, d\tau', \tag{49}$$

где $m_g(\tau)$ и $R_g(\tau, \tau')$ — математическое ожидание и корреляционная функция входного воздействия.

Из (6.26) следует, что для определения дисперсии ошибки недостаточно знания дисперсии входного сигнала, необходимо знать его корреляционную функцию. Если входной сигнал стационарный, то

$R_g(\tau, \tau') = R_g(\tau - \tau')$.

Пример 6.7. Рассмотрим систему, представленную на рис. 6.8. Пусть $W_1 = 2$, $W_2 = 0{,}5/s$, $m_f = m_0$ ($m_0 = \text{const}$), $R_f = e^{-|\tau|}$.

Требуется определить систематическую и среднеквадратическую ошибки от возмущения.

Передаточная функция ошибки от возмущения $W_{ef} = -W_1/(1 + W_1W_2) =$ $=-0{,}5/(1 + s)$, откуда для весовой функции по (6.6) получаем $w_{ef}(t) = -0{,}5e^{-t}$,

Систематическая ошибка

$$m_e = -\int_0^t 0{,}5e^{-(t-\tau)}m_0\,d\tau = -m_0(1 - e^{-t}).$$

Дисперсия

$$D_e = \int_0^t\int_0^t 0{,}25e^{-(t-\tau)}e^{-(t-\tau')}e^{-|\tau-\tau'|}\,d\tau'\,d\tau.$$

Разобьем внутренний интеграл на два интеграла: произведем интегрирование по τ' отдельно на интервалах $[0, \tau]$ и $[\tau, t]$. На первом интервале $\tau' \leqslant \tau$ и $e^{-|\tau-\tau'|} = e^{-(\tau-\tau')}$, на втором интервале $\tau' \geqslant \tau$ и $e^{-|\tau-\tau'|} = e^{-(\tau'-\tau)}$. Поэтому

$$D_e = 0{,}25e^{-2t}\int_0^t\left[\int_0^\tau e^{\tau+\tau'}e^{-(\tau-\tau')}\,d\tau' + \int_\tau^t e^{\tau+\tau'}e^{-(\tau'-\tau)}\,d\tau'\right]\times$$

$$\times\,d\tau = 0{,}25\,(0{,}5 - te^{-2t} - 0{,}5e^{-2t}),\quad \sigma_e = \sqrt{0{,}25\,(0{,}5 - te^{-2t} - 0{,}5e^{-2t})}.$$

Как следует из рассмотренного примера, при подаче на вход линейной стационарной системы стационарного случайного процесса процесс на выходе в переходном режиме не является стационарным. Представим входное воздействие в виде суммы $G(t) = m_g(t) + \overset{0}{G}$ (0> гДе случайная составляющая

$\overset{0}{G}(t) = G(t) - m_g(t)$, $M\overset{0}{G}(t) = 0$. (6.27) Как следует из соотношения (6.24), на систематическую ошибку

случайная составляющая $\overset{0}{G}(t)$ не влияет и при ее вычислении

можно считать, что на систему действует только детерминированное воздействие $m_g(t)$.

Пример 6.8. Пусть передаточная функция разомкнутой системы $W(s)=k/s$ и математическое ожидание задающего воздействия $m_g = m_0 = \text{const}$. Требуется определить систематическую ошибку.

Передаточная функция ошибки от задающего воздействия

$$W_{eg}(s) = 1/[1 + W(s)] = s/(s + k).$$

Изображение систематической ошибки

$$L\{m_e\} = W_{eg}(s)\,L\{m_g\} = m_0/(s + k).$$

По теореме разложения (6.6),

$$m_e = m_0e^{-kt}.$$

Определение ошибок в установившемся режиме. Когда рассматривается установившийся процесс, можно принять, что входное воздействие прикладывается в момент $t = -\infty$. Поэтому соотношение (6.23) в этом случае имеет вид

$$E(t) = \int_{-\infty}^t w_{eg}(t - \tau)\,G(\tau)\,d\tau,$$

или после замены переменной $\xi = t - \tau$

$$E(t) = \int_0^\infty w_{eg}(\xi)\,G(t - \xi)\,d\xi. \quad \textbf{(50)}$$

При вычислении систематической ошибки в установившемся режиме, как и в детерминированном случае, можно воспользоваться разложением

$$m_e(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_{gi}}{i!} \frac{d^i m_g(t)}{dt^i},$$

где C_{gi} — коэффициенты ошибок.

Рассмотрим, как вычисляется среднеквадратическая ошибка в установившемся режиме, когда входное воздействие является стационарным случайным процессом. Покажем прежде всего, что в этом случае процесс на выходе является стационарным, т. е. если характеристики входного воздействия $m_g = \text{const}$ и $R_g(t, t+\tau) = \; = R_g(\tau)$, то в установившемся режиме $m_e = \text{const}$ и $R_e(t, t+\tau) = R_e(\tau)$.

Систематическая ошибка (математическое ожидание ошибки) $m_e(t) = C_{g0} m_g = \text{const}$.

По определению, корреляционная функция ошибки

$$R_e(t, t+\tau) = M[\overset{0}{E}(t), \overset{0}{E}(t+\tau)], \quad (51)$$

где по (6.27) и (6.28) получаем

$$\overset{0}{E}(t) = E(t) - m_e(t) = \int_0^{\infty} w_{eg}(\xi)\, \overset{0}{G}(t-\xi)\, d\xi. \quad (52)$$

Подставив (6.30) в (6.29) и поменяв местами операции математического ожидания и интегрирования, получим

$$R_e(t, t+\tau) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} w_{eg}(\xi_1)\, w_{eg}(\xi_2)\, M\left\{\overset{0}{G}(t-\xi_1)\, \overset{0}{G}(t+\tau-\xi_2)\right\} d\xi_1\, d\xi_2 =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} w_{eg}(\xi_1)\, w_{eg}(\xi_2)\, R_g(\tau+\xi_1-\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 = R_e(\tau).$$

Таким образом, действительно ошибка в установившемся pi-жиме при стационарном случайном воздействии является стационарным случайным процессом. Поэтому как одну из ее характеристик можно использовать спектральную плотность. *Спектральной плотностью* $S_e(\omega)$ стационарного случайного процесса *E (t)* называется двустороннее преобразование Фурье от его корреляционной функции:

$$S_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_e(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau. \quad (53)$$

Корреляционная функция стационарного случайного процесса по его спектральной плотности определяется с помощью обратного преобразования Фурье:

$$R_e(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_e(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega. \quad (54)$$

Подставив в (6.31)

$$R_g(\tau+\xi_1-\xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega)\, e^{j\omega(\tau+\xi_1-\xi_2)}\, d\omega$$

и поменяв порядок интегрирования, получим

$$R_e(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega)\, e^{j\omega\tau} \left[\int_0^{\infty} w_{eg}(\xi_1)\, e^{j\omega\xi_1}\, d\xi_1 \int_0^{\infty} w_{eg}(\xi_2)\, e^{-j\omega\xi_2}\, d\xi_2\right] d\omega.$$

Так как

$$\int_0^{\infty} w_{eg}(\xi_1)\, e^{j\omega\xi_1}\, d\xi_1 = W_{eg}(-j\omega), \quad \int_0^{\infty} w_{eg}(\xi_2)\, e^{-j\omega\xi_2}\, d\xi_2 = W_{eg}(j\omega),$$

то

$$R_e(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{eg}(j\omega)|^2 S_g(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad \textbf{(55)}$$

Из (6.34) для дисперсии ошибки получаем

$$D_e = R_e(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{eg}(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega. \quad \textbf{(56)}$$

Сравнивая подынтегральные выражения в правых частях соотношений (6.33) и(6.34), получаем

$$S_e(\omega) = |W_{eg}(j\omega)|^2 S_g(\omega), \quad \textbf{(57)}$$

где$W_{eg}(j\omega)$ — частотная передаточная функция системы.

Эта формула выражает связь между спектральными плотностями входной и выходной величин линейной системы. Если подынтегральное выражение в (6.35), т. е. спектральная плотность, является дробно-рациональной функцией, то, представив ее в виде

$$S_e(\omega) = |A(j\omega)/B(j\omega)|^2,$$

где A (s) и B (s) — полиномы, при вычислении дисперсии можно использовать соотношение (6.14).

Спектральная плотность ошибки от задающего воздействия

$$S_{eg}(\omega) = \left| \frac{T(j\omega)^2 + j\omega}{T(j\omega)^2 + j\omega + k} \right|^2 \frac{2\alpha}{|j\omega + \alpha|^2} = 2\alpha \times$$

$$\times \left| \frac{T(j\omega)^2 + j\omega}{T(j\omega)^3 + (\alpha T + 1)(j\omega)^2 + (k + \alpha) j\omega + k\alpha} \right|^2.$$

Дисперсия ошибки от задающего воздействия

$$D_{eg} = 2\alpha I_3 = 2\alpha \left[b_0^2 a_2 a_3 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + b_2^2 a_0 a_1 \right] / \left[2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) \right],$$

где$a_0 = T,\ a_1 = \alpha T + 1,\ a_2 = k + \alpha,\ a_3 = k\alpha,\ b_0 = T,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0.$

После подстановки этих значений получаем$D_{eg} = \alpha\,[T(k + \alpha) + 1]/(\alpha^2 T + \alpha + k)$.

Среднеквадратическая ошибка

$$\sigma_e = \sqrt{D_{ef} + D_{eg}} = \sqrt{Nk/2 + \alpha\,[T(k+\alpha) + 1]/(\alpha^2 T + \alpha + k)}.$$

если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W^*(z) = [k/(z-1)^{\nu}]\, W_0^*(z),$$

где$\nu \geqslant 1,\ W_0^*(1) = 1.$

Так как $Z_T\{1/s\} = z/(z-1)$, то передаточная функция разомкнутой системы имеет указанный вид, если непрерывная часть содержит интегрирующие звенья. При этом если система состоит только из импульсного элемента и непрерывной части, то ее порядок астатизма совпадает с числом интегрирующих звеньев в непрерывной части. Когда система содержит также дискретный фильтр, то, очевидно, ее порядок астатизма повышается, если $z = 1$ является полюсом кратности μ передаточной функции дискретного фильтра.

Методы синтеза непрерывных систем.

Система автоматического управления, как известно, состоит из объекта управления *ОУ* и управляющего устройства, которое включает регулятор *Р* (рис. 6.11). Задача синтеза системы автоматического управления, или управляющего устройства (регулятора), ставится следующим образом.

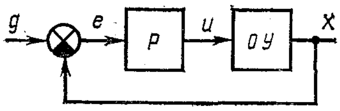


Схема для постановки задачи синтеза системы автоматического управления

При заданном объекте управления требуется синтезировать (построить) такое управляющее устройство, при котором система удовлетворяет заданным требованиям к ее качеству. Требования к качеству системы могут уточняться в процессе синтеза.

Возможны две различные постановки задачи синтеза: 1) структура управляющего устройства (регулятора) и, следовательно, структура системы заданы; необходимо, исходя из заданных требований к системе, определить параметры управляющего устройства или параметры и корректирующее устройство; 2) структура системы не задана и надо синтезировать управляющее устройство (его структуру и параметры), обеспечивающее заданные требования к качеству системы. Ниже рассматривается задача синтеза только в первой постановке.

Законы управления. *Законом управления* называется функциональная зависимость выходной величины управляющего устройства (регулятора) от его входной величины, составленная без учета динамических запаздываний элементов управляющего устройства. Иначе: законом управления называется функциональная зависимость, которую можно реализовать с помощью идеальных элементов или которая составлена без учета реальных характеристик элементов управляющего устройства.

В промышленных регуляторах используются следующие типовые законы управления.

Пропорциональный закон: $u = k_0 e$. Здесь u — выходная величина, e — входная величина регулятора (рис).

Регулятор с таким законом управления называется *пропорциональным регулятором* или *П-регулятором.*

Пропорционально-дифференциальный закон: $u = (k_0 + k_1 p)e$. Регулятор с таким законом управления называется *пропорционально-дифференциальным регулятором или ПД-регулятором.*

Пропорционально-интегральный закон: $u = (k_0 + k_2/p)e$. Регулятор с таким законом управления называется *пропорционально-интегральным регулятором или ПИ-регуля-тором.*

Пропорционально-интегродифференци-альный закон: $u = (k_0 + k_1 p + k_2/p)/e$. Регулятор с таким законом управления называется *пропорционально-интегродифференциальным регулятором или ПИД-регулятором.* Закон управления или тип регулятора выбирается с учетом возможности обеспечения устойчивости и заданных требований к качеству системы.

Синтез параметров системы. Если тип регулятора выбран, то задача синтеза управляющего устройства сводится к определению его параметров. Обычно задаются требования к качеству системы отдельно в переходном и установившемся режимах. Поэтому часть параметров можно определить из условия обеспечения заданной точности в установившемся режиме, остальные параметры — из условия обеспечения оптимума некоторого показателя качества в переходном режиме.

Свойство системы относительно управляющего воздействия в установившемся режиме однозначно определяется порядком астатизма и передаточным коэффициентом разомкнутой системы; это же относительно возмущения — порядком астатизма и передаточным коэффициентом звена, включенного между сравнивающим звеном и сумматором, к которому приложено возмущение. В качестве показателя, определяющего свойство системы в переходном режиме, часто используют квадратичную интегральную оценку. Параметры определяют из условия минимума этого показателя. При этом, так как указанный показатель легко вычисляется и выражается в виде обычной функции от параметров регулятора, задача синтеза сводится к задаче математического программирования (задаче на условный экстремум функции нескольких переменных).

Пример. Пусть передаточная функция разомкнутой системы $W(s) = 1/(s^2 + 2\xi s + 1)$.

Найдем параметр ξ из условия минимума квадратичной интегральной оценки J_0 переходной составляющей ошибки от задающего воздействия. Как показано (см. пример 6.4), показатель $J_0 = (1 + \xi^2)/(16\xi)$. Найдем минимум J_0 по ξ при $\xi \geqslant 0$:

$$dJ_0/d\xi = 2\xi^2 - 1/(16\xi^2) = 0, \quad \xi = \sqrt{2}.$$

Пример 6.14. Пусть передаточная функция объекта управления $W_0(s) = = 1/s(s+1)$ и выбран П-регулятор:(см. $W_p(s) = k_0$ рис. 6.11). Параметр k_0

можно изменять в следующих пределах: $0 \leqslant k_0 \leqslant 100$. Требуется выбрать такое значение параметра r0, при котором установившаяся ошибка $e_{g\infty}$ при задающем воздействии g= 5t меньше 0,1 ($e_{g\infty} \leqslant 0{,}1$) и квадратичная интегральная оценка J_0 принимает минимальное значение.

Передаточная функция ошибки $W_{eg}(s) = s(s+1)/[s(s+1) + k_0]$. Коэффициенты ошибок $C_{g0} = 0$, $C_{g1} = 1/k_0$. Ошибка $e_{g\infty} = C_{g1} dg/dt = 5/k_0 \leqslant 0{,}1$, если $k_0 \geqslant 50$.

Так как $C_{g0} = 0$, то $e_п(t) = e(t)$. Поэтому $E_п(s) = E(s) = W_{eg}(s)/s = (s+1)/(s^2 + s + k_0)$. Из соотношений (6.14) $J_0 = I_2 = (k_0 + 1)/(2k_0) = {}^1/_2 + 1/(2k_0)$.

Очевидно, решением задачи будет максимально возможное значение т. е. $k_0 = 100$. k_0,

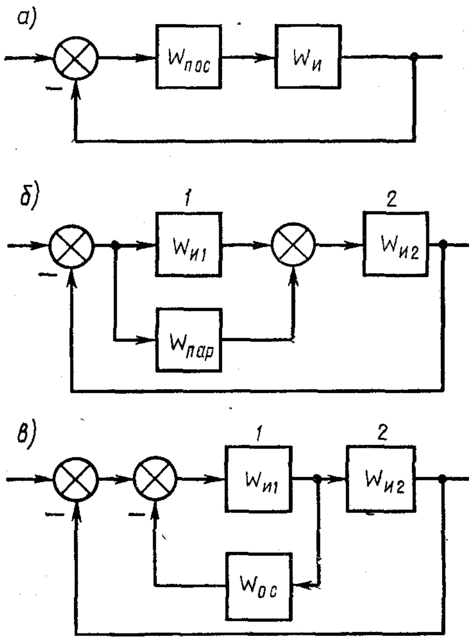
Когда на систему действуют случайные воздействия, то часто параметры регулятора выбираются из условия минимума средне-квадратической ошибки в установившемся режиме. При этом, так как среднеквадратическая ошибка легко вычисляется и выражается в виде обычной функции от параметров регулятора, задача

синтеза и в этом случае сводится к задаче математического программирования.

Пример 6.15. Пусть передаточная функция разомкнутой системы (см. рис. 6.9) $W(s) =$
$= k/s(s+1)$, задающее воздействие $g(t) = 5t$, возмущающее — стационарный $MF(t) = 0$, $R_f(\tau) = N\delta(\tau)$ белый шум:

Требуется определить такое значение передаточного коэффициента, при котором в установившемся режиме систематическая ошибка $m_e \leqslant 0{,}1$ и среднеквадратическая ошибка, или дисперсия, ошибки минимальна. Как показано в примере 6.9, $m_e =$
$= 5/k$, $D_e = Nk/2$.

Условие $m_e \leqslant 0{,}1$ будет выполнено, если $k \geqslant 50$. Дисперсия ошибки с ростом k возрастает. Поэтому решением задачи является $k = 50$.



Схемы включения корректирующих звеньев

Синтез корректирующих звеньев. При фиксированной структуре системы (тип регулятора выбран) не всегда удается обеспечить заданные требования к ее качеству только выбором параметров регулятора. В таких случаях возникает необходимость изменения структуры системы путем введения в нее корректирующего звена. При этом встает задача синтеза корректирующего звена по заданным показателям качества. Корректирующее звено можно включить в систему последовательно (рис. 6.12, *а)*, параллельно (рис. 6.12, б) и в виде обратного соединения (рис. 6.12, *в)*. В первом случае корректирующее звено называется последовательным, во втором — параллельным и в третьем — встречно-параллельным или обратным.

Свойство замкнутой системы полностью определяется передаточной функцией и соответственно частотными характеристиками разомкнутой системы. Если разомкнутая система является минимально-фазовой, т. е. ее передаточная функция не имеет нулей и полюсов в правой полуплоскости, то между амплитудными и фазовыми частотными характеристиками существует взаимно однозначная зависимость. И поэтому в этом случае для описания системы можно использовать только амплитудные частотные характеристики. Для этой цели особенно удобны логарифмические амплитудные частотные характеристики (ЛАЧХ).

Метод синтеза последовательного корректирующего звена **по ЛАЧХ.** Пусть $W_ж$ — передаточная функция разомкнутой системы, обладающая требуемыми показателями качества. Тогда, очевидно, передаточная функция искомого корректирующего звена должна удовлетворять соотношению (рис. 6.12, *а)*

$$W_ж = W_{пос} W_и \text{ или}$$

$$L_{пос} = L_ж - L_и,$$

где $W_ж$ — желаемая передаточная функция; $W_и$ — передаточная функция исходной (заданной) системы; $W_{пос}$ — передаточная функция последовательного корректирующего звена; $L_ж$, $L_и$ и $L_{пос}$ — соответствующие ЛАЧХ.

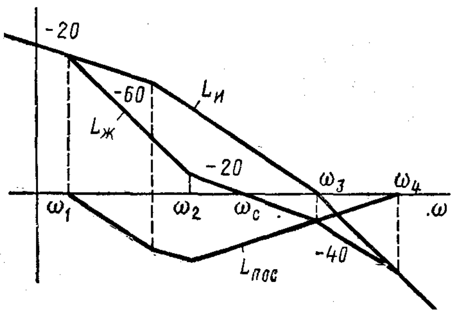


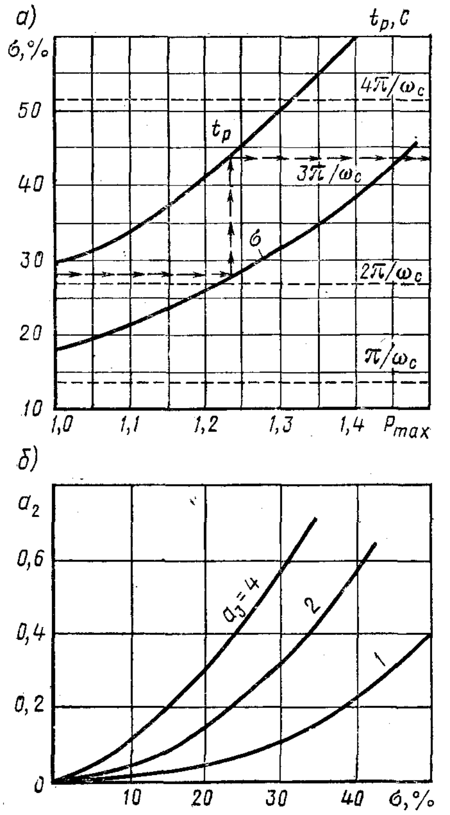
Схема для синтеза системы по ЛАЧХ

Из последнего соотношения вытекает следующий порядок определения ЛАЧХ корректирующего звена. Строятся исходная и желаемая асимптотические ЛАЧХ. Причем вначале строится исходная ЛАЧХ, так как она используется при построении желаемой. Вычитая исходную ЛАЧХ из желаемой, получают ЛАЧХ корректирующего звена (рис. 6.13), по которой находят передаточную функцию и схему корректирующего звена.

Построение желаемой **ЛАЧХ.** Низкочастотная (первая) асимптота желаемой ЛАЧХ совпадает с первой асимптотой исходной ЛАЧХ. Это объясняется тем, что низкочастотная асимптота характеризует свойство системы в установившемся режиме, а структура и параметры исходной системы выбираются с учетом требований к качеству системы в установившемся режиме.

Среднечастотная асимптота обычно проводится под наклоном —20 дБ/дек через частоту среза ω_c (рис. 6.13), которая определяется по номограмме рис. 6.14, *а* по данным перерегулирования *а* и времени регулирования t_p. Граничные частоты ω_2 и ω_3 среднечастотной асимптоты определяются из соотношений $\omega_2 = a_2\omega_c$ и $\omega_3 = a_3\omega_c$, где $a_3 = 2 \div 4$ и a_2 находится по номограмме рис. Высокочастотная (последняя) асимптота на качество системы почти не влияет. И поэтому для простоты корректирующего звена ее выбирают совпадающей или параллельной высокочастотной (последней) асимптоте исходной ЛАЧХ. Асимптоты, которые соединяют среднечастотную асимптоту с низкочастотной и высокочастотной асимптотами, проводятся под наклоном —(40—60) дБ/дек. Все разработанные (в том числе и рассмотренные) методы построения желаемой ЛАЧХ являются приближенными. И при необходимости (например, для упрощения корректирующего звена) можно брать значения ω_c, ω_2 и ω_3, отличные от расчетных. После определения корректирующего звена нужно обязательно проверить качество синтезированной системы по ее переходной характеристике. Если окажется, что показатели качества хуже заданных, то нужно уточнить желаемую ЛАЧХ — изменить частоты ω_c, ω_2 и ω_3. При этом "следует руководствоваться тем обстоятельством, что время регулирования $t_р$ обратно пропорционально частоте среза ω_c (т. е. для уменьшения $t_р$ нужно увеличивать ω_c) и перерегулирование тем меньше, чем дальше отстоят от частоты среза ω_c частоты ω_2 и ω_3

Синтез параллельного и обратного корректирующих звеньев. Пусть передаточная функция $W_{пос}$ последовательного корректирующего звена определена изложенным выше способом. Тогда передаточные функции параллельного и обратного



Номограммы для построения желаемой ЛАЧХ

корректирующих звеньев определятся следующим образом. Допустим, что исходная разомкнутая система с передаточной функцией $W_и$ состоит из двух звеньев с передаточными функциями $W_{и1}$ и $W_{и2}$ и корректирующее звено включается параллельно первому звену (см. рис. 6.12, *б)*. Передаточная функция разомкнутой системы с параллельным корректирующим звеном имеет вид

$$W = (W_{и1} + W_{пар}) W_{и2}$$

Из условия равенства этой передаточной функции желаемой передаточной функции $W_ж = W_{пос} W_и$ для передаточной функции параллельного корректирующего звена получаем

$$W_{пар} = W_{и1} (W_{пос} - 1).$$

Если корректирующее звено включено в обратную связь первого звена (см. рис.), то передаточная функция разомкнутой системы

$$W = W_{и1} W_{и2} / (1 + W_{и1} W_0).$$

Из равенства этой передаточной функции желаемой для передаточной функции обратного корректирующего звена получаем

$$W_0 = (1 - W_{пос}) / (W_{и1} W_{и2}).$$

Тема 4. Автоматизированные системы управления технологическими процессами.

В типовой архитектуре АСУТП НГК явно просматриваются два уровня:

- уровень контроллеров, взаимодействующих с объектом управления посредством датчиков и исполнительных устройств;

- уровень оперативного управления технологическим процессом, основными компонентами которого являются серверы, рабочие станции операторов/диспетчеров, АРМ специалистов.

Каждый из этих уровней функционирует под управлением специализированного программного обеспечения (ПО). Разработка этого ПО или его выбор из предлагаемых в настоящее время на рынке программных средств зависит от многих факторов, прежде всего от решаемых на конкретном уровне задач. Различают базовое и прикладное программное обеспечение (рис.3.1.).

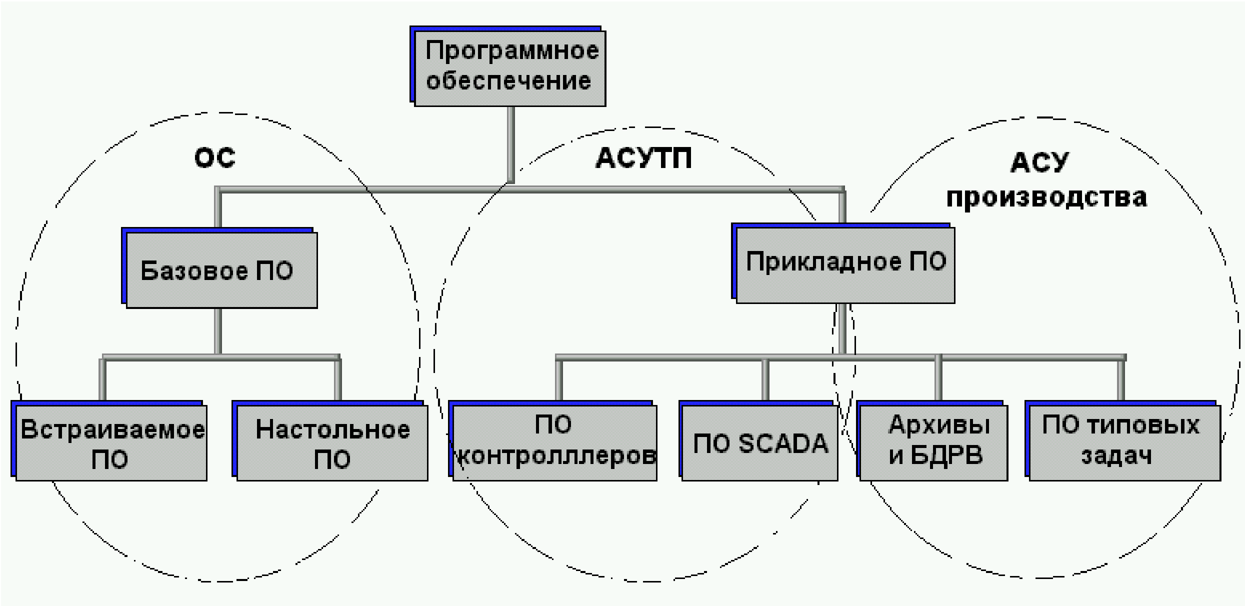


Рис.3.1. Классификация программных средств системы управления

Базовое ПО включает в себя различные компоненты, но основным из них является операционная система (ОС) программно-технических средств АСУТП. Каждый уровень АСУТП представлен «своими» программно-техническими средствами: на нижнем уровне речь идет о контроллерах, тогда как основным техническим средством верхнего уровня является компьютер. В соответствии с этим в кругу специалистов появилась и такая классификация: встраиваемое и настольное программное обеспечение.

Очевидно, требования, предъявляемые к встраиваемому и настольному ПО, различны. Контроллер в системе управления наряду с функциями сбора информации решает задачи автоматического непрерывного или логического управления. В связи с этим к нему предъявляются жесткие требования по времени реакции на состояние объекта и выдачи управляющих воздействий на исполнительные устройства. Контроллер должен гарантированно откликаться на изменения состояния объекта за заданное время.

Для решения подобных задач рекомендуется применение ОС реального времени (ОСРВ). Такие операционные системы иногда называют детерминированными, подразумевая под этим гарантированный отклик за заданный промежуток времени. Большинство микропроцессорных устройств (в том числе контроллеры и компьютеры) используют механизм прерываний работы процессора. В ОС реального времени, в отличие от ОС общего назначения (не гарантирующих времени исполнения), прерываниям присвоены приоритеты, а сами прерывания обрабатываются за гарантированное время.

Выбор ОС зависит от жесткости требований реального времени. Для задач, критичных к реакции системы управления, в настоящее время применяются такие операционные системы реального времени, как OS-9, QNX, VxWorks. В системах с менее жесткими требованиями к реальному времени возможно применение версий Windows NT/CE, точнее их расширений реального времени.

OS-9 относится к классу Unix-подобных операционных систем реального времени и предлагает многие привычные элементы среды Unix. Все функциональные компоненты OS-9, включая ядро, иерархические файловые менеджеры, систему ввода/вывода и средства разработки, реализованы в виде независимых модулей. Комбинируя эти модули, разработчик может создавать системы с самой разной конфигурацией - от миниатюрных автономных ядер, ориентированных на ПЗУ контроллеров, до полномасштабных многопользовательских систем разработки.

OS-9 обеспечивает выполнение всех основных функций операционных систем реального времени: управление прерываниями, межзадачный обмен информацией и синхронизация задач.

Операционная система QNX разработки канадской фирмы QNX Software Systems Ltd. является одной из наиболее широко используемых систем реального времени. QNX гарантирует время реакции в пределах от нескольких десятков микросекунд до нескольких миллисекунд (в зависимости от быстродействия ПЭВМ и версии QNX). Кроме того, высокая эффективность QNX в задачах управления в реальном времени обеспечивается такими свойствами, как многозадачность (до 250 задач на одном узле), встроенные в ядро системы сетевые возможности, гибкое управление прерываниями и приоритетами, возможность выполнения задач в защищенном и фоновом режимах.

Операционная система QNX нашла применение как на нижнем уровне АСУТП (ОС для контроллеров), так и на верхнем уровне (ОС для программного обеспечения SCADA).

Операционная система реального времени VxWorks предназначена для разработки ПО встроенных компьютеров, работающих в системах «жесткого» реального времени. К операционной системе VxWorks прилагается и инструментальная среда Tornado фирмы Wind River Systems со средствами разработки прикладного программного обеспечения. Его разработка ведется на инструментальном компьютере в среде Tornado для последующего исполнения на целевом компьютере (контроллере) под управлением VxWorks.

ОС VxWorks поддерживает целый ряд компьютерных платформ, в том числе Intel 386/486/Pentium, PowerPC, DEC Alpha. К платформам, поддерживаемым инструментальной средой Tornado, относятся Sun (Solaris), HP 9000/400,700, DEC Alpha, PC (Windows 95 и NT) и другие.

Операционная система Windows знакома всем как настольная система. Но это, прежде всего, относится к платформам Windows 3.xx/95, в которых действительно отсутствует поддержка реального времени. Ситуация резко изменилась с появлением Windows NT. Сама по себе Windows NT не является операционной системой реального времени в силу ряда ее особенностей. Система поддерживает аппаратные (а не программные) прерывания, отсутствует приоритетная обработка отложенных процедур и др. Но в конце XX века ряд фирм предприняли серьезные попытки превратить Windows NT в ОС жесткого реального времени. И эти попытки увенчались успехом. Компания VenturCom разработала модуль Real Time Extension (RTX) - подсистему реального времени (РВ) для Windows NT. Эта подсистема имеет собственный планировщик со 128 приоритетами прерываний, который не зависит от NT. Максимальное время реакции на прерывание составляет 20-80 мкс вне зависимости от загрузки процессора. Теперь при каждом прерывании от таймера приоритет передается критичным по времени задачам. А в оставшееся от их работы время могут выполняться «медленные» процессы: ввод/вывод, работа с диском, сетью, графическим интерфейсом и т. п.

32-разрядная Windows CE была создана компанией Microsoft для малых компьютеров (калькуляторов), но в силу ряда достоинств стала претендовать на роль стандартной ОС реального времени. К числу этих достоинств относятся:

- открытость и простота стыковки с другими ОС семейства Windows;
- время реакции порядка 500 мкс;
- значительно меньшие по сравнению с другими ОС Windows требования к ресурсам памяти и возможность построения бездисковых систем.

А в 1999 году компанией Direct by Koyo ОС Windows CE была впервые установлена на платформу микроPLC.

Выбор операционной системы программно-технических средств верхнего уровня АСУТП определяется прикладной задачей (ОС общего пользования или ОСРВ). Но наибольшую популярность и распространение получили различные варианты ОС Windows (Windows NT/2000). Ими оснащены программно-технические средства верхнего уровня АСУТП, представленные персональными компьютерами (ПК) разной мощности и конфигурации - рабочие станции операторов/диспетчеров и специалистов, серверы баз данных (БД) и т. д.

Такая ситуация возникла в результате целого ряда причин и тенденций развития современных информационных и микропроцессорных технологий.

Вот несколько основных аргументов в пользу Windows:

- Windows имеет очень широкое распространение в мире, в том числе и в России, в связи с чем легко найти специалиста, который мог бы сопровождать системы на базе этой ОС;
- эта ОС имеет множество приложений, обеспечивающих решение различных задач обработки и представления информации;

- ОС Windows и Windows-приложения просты в освоении и обладают типовым интуитивно понятным интерфейсом;
- приложения, работающие под управлением Windows, поддерживают общедоступные стандарты обмена данными;
- системы на базе ОС Windows просты в эксплуатации и развитии, что делает их экономичными как с точки зрения поддержки, так и при поэтапном росте;
- Microsoft развивает информационные технологии (ИТ) для Windows высокими темпами, что позволяет компаниям, использующим эту платформу «идти в ногу со временем».

Также следует учитывать и то, что неотъемлемой частью верхнего уровня АСУ ТП является человек, время реакции которого на события недетерминировано и зачастую достаточно велико. Да и сама проблема реального времени на верхнем уровне не столь актуальна.

В 90-х годах широкое распространение получила ОС реального времени QNX. Имеется множество примеров использования QNX на всех уровня иерархической структуры АСУТП (от контроллеров до серверов и рабочих станций). Но в последние годы активность компании на рынке SCADA-систем значительно снизилась, что привело и к снижению числа продаж этого программного продукта. Объясняется это тем, что еще в 1995 году компания QNX Software Systems Ltd. объявила об «уходе» во встроенные системы.

С точки зрения разработки системы управления предпочтительна такая программная архитектура, в которой ПО всех уровней управления реализовано в единой операционной системе. В этом случае «автоматически» снимаются все вопросы, связанные с вертикальным взаимодействием различных программных компонент системы управления. Но на практике это далеко не так. Достаточно часто в разрабатываемых системах контроля и управления нижний и верхний уровни реализуются в разных ОС. И наиболее характерна ситуация, когда на уровне контроллера используется ОС реального времени, а на уровне оператора/диспетчера SCADA-система функционирует под Windows NT. Без специализированных решений по организации взаимодействия между подсистемами здесь не обойтись.

Для функционирования системы управления необходим и еще один тип ПО - прикладное программное обеспечение (ППО).

Известны два пути разработки прикладного программного обеспечения систем управления:

- создание собственного прикладного ПО с использованием средств

  традиционного программирования (стандартные языки программирования, средства отладки и т.д.);
- использование для разработки прикладного ПО существующих (готовых) инструментальных средств.

Первый вариант является наиболее трудоемким. Применение высокоуровневых языков требует соответствующей квалификации разработчиков в теории и технологии программирования, знания особенностей конкретной операционной системы, тонкостей аппаратного обеспечения (контроллеров). С точки зрения основных критериев - стоимости и времени разработки - этот вариант неприемлем в большинстве случаев.

Второй вариант является более предпочтительным. Почему? А потому, что на сегодняшний день в мире уже создано несколько десятков инструментальных систем, хорошо поддерживаемых, развиваемых и нашедших применение при создании десятков и сотен тысяч проектов автоматизации. Эти проверенные временем программные средства упрощают (разработчики интерфейсов - не высококлассные программисты, а специалисты по автоматизации), ускоряют и значительно удешевляют процесс разработки.

С точки зрения области применения готовые инструментальные средства можно разделить на два класса:

- средства, ориентированные на разработку программ управления внешними устройствами, контроллерами - CASE-системы (Computer Aided Software Engineering);

- средства, ориентированные на обеспечение интерфейса оператора/ диспетчера с системой управления – SCADA-системы (Supervisory Control And Data Acquisition - диспетчерское управление и сбор данных).

Контроллеру требуется программа, в соответствии с которой он взаимодействует с объектом. В одних случаях речь идет только о сборе данных с объекта, в других - о логическом управлении (например, выполнении блокировок). Наконец, одно из основных применений контроллера - реализация функций непрерывного управления отдельными параметрами или технологическим аппаратом (процессом) в целом.

Фирмы, производящие оборудование для построения систем автоматизации, всегда стремились сопровождать свою продукцию набором программных инструментов, с помощью которых пользователь по определенным правилам и соглашениям мог бы описывать логику работы контроллера. На раннем этапе развития этих программных средств набор поддерживаемых ими функций обеспечивался нестандартными языками. Со временем правила и соглашения совершенствовались и на определенном этапе были оформлены в виде специальных языков программирования, образовав то, что сейчас называется CASE-инструментарием.

В 1992 году Международная Электротехническая Комиссия (МЭК, IEC - International Electrotechnical Commission,) взяла под контроль процессы, связанные с развитием этого типа прикладного ПО. Были выдвинуты требования открытости системы, выполнение которых позволило бы унифицировать программные средства и упростить разработку:

- возможность разработки драйверов для контроллеров самими пользователями, т.е. сопровождение программных продуктов по программированию контроллеров специальными инструментальными средствами;
- наличие коммуникационных средств (интерфейсов) для взаимодействия с другими компонентами системы управления;
- возможность портации ядра системы на ряд программно-аппаратных платформ.

На рынке появилось большое количество пакетов, удовлетворяющих вышеописанным требованиям. Практически во всех этих пакетах среда разработки реализована в Windows-интерфейсе, имеются средства загрузки разработанного приложения в исполнительную систему.

Названия некоторых из этих пакетов приведены ниже:

- RSLogix 500, RS Logix 5, RSLogix 5000 фирмы Rockwell Software для программирования контроллеров различных семейств Allen-Bradley;
- DirectSOFT для контроллеров семейства Direct Logic фирмы Koyo;
- пакеты PL7 и Concept - ПО для программирования контроллеров различных семейств компании Schneider Electric;
- пакеты STEP 5, STEP 7 Micro, STEP 7 для программирования контроллеров семейств S5 и S7 фирмы Siemens;
- пакет Toolbox для конфигурирования контроллеров семейства Moscad;
- пакет TelePACE для программирования контроллеров серий TeleSAFE Micro 16 и SCADAPack фирмы Control Microsystems.

Стандартом МЭК 1131-3 определены пять языков программирования контроллеров: три графических (LD, FBD, SFC) и два текстовых (ST, IL).

LD (Ladder Diagram) - графический язык диаграмм релейной логики. Язык LD применяется для описания логических выражений различного уровня сложности.

FBD (Function Block Diagram) - графический язык функциональных блоковых диаграмм. Язык FBD применяется для построения комплексных процедур, состоящих из различных функциональных библиотечных блоков - арифметических, тригонометрических, регуляторов и т.д.).

SFC (Sequential Function Chart) - графический язык последовательных функциональных схем. Язык SFC предназначен для использования на этапе проектирования ПО и позволяет описать «скелет» программы - логику ее работы на уровне последовательных шагов и условных переходов.

ST (Structured Text) - язык структурированного текста. Это язык высокого уровня, по мнемонике похож на Pascal и применяется для разработки процедур обработки данных.

IL (Instruction List) - язык инструкций. Это язык низкого уровня класса ассемблера и применяется для программирования эффективных, оптимизированных процедур.

В конце 90-х годов появились открытые программные продукты ISaGRAF, InControl (Wonderware), Paradym (Intellution), предназначенные для разработки, отладки и исполнения программ управления как дискретными, так и непрерывными процессами.

Сейчас уже можно сказать, что подавляющее большинство контроллеров и систем управления обслуживается программными продуктами, реализующими стандарт МЭК 1131-3.

Широкое применение в России нашел пакет ISaGRAF французской компании CJ International.

Основные возможности пакета:

- Поддержка всех пяти языков стандарта МЭК 1131-3 плюс реализация языка Flow Chart как средства описания диаграмм состояний. При этом ISaGRAF позволяет смешивать программы и процедуры, написанные на разных языках, а также вставлять кодовые последовательности из одного языка в коды, написанные на другом языке.
- Наличие многофункционального отладчика, позволяющего во время работы прикладной задачи просматривать состояние программного кода, переменных, программ и многое другое.
- Поддержка различных протоколов промышленных сетей.
- Реализация опций, обеспечивающих открытость системы для доступа к внутренним структурам данных прикладной ISaGRAF-задачи, а также возможность разработки драйверов для модулей ввода/вывода, разработанных самим пользователем, и возможность переноса ISaGRAF-ядра на любую аппаратно-программную платформу.

- Набор драйверов для работы с контроллерами различных фирм-производителей: PEP Modular Computers, Motorola Computer Group и др.
- Наличие дополнительных интерактивных редакторов для описания переменных, констант и конфигураций ввода/вывода.
- Встроенные средства контроля за внесением изменений в программный код ISaGRAF-приложения и печати отчетов по разработанному проекту с большой степенью детализации, включая печать таблиц перекрестных ссылок для программ и отдельных переменных.
- Полное документирование этапов разработки.

Программные средства верхнего уровня АСУТП (SCADA-пакеты) предназначены для создания прикладного программного обеспечения пультов контроля и управления, реализуемых на различных компьютерных платформах и специализированных рабочих станциях. SCADA - пакеты позволяют при минимальной доле программирования на простых языковых средствах разрабатывать многофункциональный интерфейс, обеспечивающий оператора/диспетчера не только полной информацией о технологическом процессе, но и возможностью им управлять.

В своем развитии SCADA - пакеты прошли тот же путь, что и программное обеспечение для программирования контроллеров. На начальном этапе (80-е годы) фирмы-разработчики аппаратных средств создавали собственные (закрытые) SCADA-системы, способные взаимодействовать только со «своей» аппаратурой. Начиная с 90-х годов, появились универсальные (открытые) SCADA - программы.

Понятие открытости является фундаментальным, когда речь идет о программно-аппаратных средствах для построения многоуровневых систем автоматизации. Более подробно об этом будет сказано ниже.

Сейчас на российском рынке присутствует несколько десятков открытых SCADA-пакетов, обладающих практически одинаковыми функциональными возможностями. Но это совсем не означает, что любой из них можно с одинаковыми усилиями (временными и финансовыми) успешно адаптировать к той или иной системе управления, особенно, если речь идет о ее модернизации. Каждый SCADA-пакет является по-своему уникальным, и его выбор для конкретной системы автоматизации, обсуждаемый на страницах специальной периодической прессы почти на протяжении последних десяти лет, по-прежнему остается актуальным.

Ниже приведен перечень наиболее популярных в России SCADA-пакетов.

- Trace Mode/Трейс Моуд (AdAstrA) - Россия;
- InTouch (Wonderware) - США;
- FIX (Intellution) - США;
- Genesis (Iconics Co) - США;
- Factory Link (United States Data Co) - США;
- RealFlex (BJ Software Systems) - США;
- Sitex (Jade Software) - Великобритания;
- Citect (CI Technology) - Австралия;
- WinCC (Siemens) - Германия;
- RTWin (SWD Real Time Systems) - Россия;
- САРГОН (НВТ - Автоматика) - Россия;
- MIK$Sys (МИФИ) - Россия;
- Cimplicity (GE Fanuc) - США;
- RSView (Rockwell Automation) - США и многие другие.

Последовательность представления пакетов в приведенном выше перечне в достаточной степени случайна. Констатируется лишь сам факт существования той или иной системы. Предлагается исходить из предпосылки, что SCADA-пакет существует, если с помощью него уже реализовано хотя бы несколько десятков проектов. Вторая предпосылка - нет абсолютно лучшей SCADA-системы для всех случаев применения. SCADA - это всего лишь удобный инструмент в руках разработчика, и ее адаптация к конкретной системе автоматизации - вопрос квалификации и опыта.

До недавнего времени задача регистрации информации в реальном времени могла быть решена либо на уровне программного обеспечения концентратора (контроллера верхнего уровня), либо на уровне SCADA-системы. При этом речь идет о больших потоках данных о процессе, поступающих от большого количества датчиков (нескольких сот или тысяч) в реальном масштабе времени и с высокой частотой (периоды опроса – порядка секунд и даже долей секунд). На уровне АСУТП эта информация нужна для оперативного управления технологическим процессом.

Данные технологических процессов специфичны. Они, как правило, могут быть представлены в виде временных рядов «значение – время». Для их сбора и хранения практически любой SCADA-пакет имеет в своем составе подсистему регистрации исторических данных (архив) с возможностью последующей выборки требуемых для анализа данных и их представления в виде трендов.

Но такие архивы не предназначены для длительного хранения больших объемов информации. К тому же, речь здесь идет о так называемых локальных архивах. Архив SCADA-пакета хранит информацию о переменных лишь одного конкретного технологического процесса. Но предприятие имеет в своем составе целый ряд технологических процессов, системы управления которыми выполнены, как правило, на различной программно-аппаратной платформе.

В получении оперативных и объективных технологических данных сегодня заинтересованы практически все службы предприятия. Однако характер необходимой информации различен для различных уровней управления. На верхнем уровне (АСУП) нужна только интегрированная (предварительно подготовленная) информация о технологических процессах (данные типа «нарастающим итогом», средних значений за определенные промежутки времени, общее количество произведенных продуктов и т.д.).

Для хранения такой информации хорошо адаптированы базы данных реляционного типа (РБД). Данные в этих базах статичны, связаны многими отношениями, должны быть легко выбираемы по различным сложным критериям. Однако РБД не приспособлены для хранения огромного количества значений параметров, получаемых от SCADA-систем и накапливаемых за достаточно длительное время (до трех и более лет).

В результате, информация, имеющаяся и успешно используемая в АСУТП, недоступна для верхнего уровня.

Таким образом, назрела необходимость создания и внедрения в процесс управления так называемых исторических архивов производственных данных или баз данных реального времени (БДРВ) масштаба предприятия.

Во - первых, такие системы должны обеспечить сбор данных с различных источников производственной информации на предприятии (SCADA-систем, DCS-систем, лабораторных систем - LIMS, различных СУБД и т. п.) и их долговременное хранение в едином формате. Во-вторых - обеспечить доступ к информации специалистам и руководителям всех уровней и служб по стандартным протоколам с помощью специализированных клиентских приложений.

Такие системы от различных производителей (в том числе и от производителей SCADA-систем) уже появились в России и с каждым днем находят все более широкое применение. Среди них IndustrialSQL Server – компонент интегрированного пакета FactorySuite (Wonderware), iHistorian - компонент семейства Intellution Dynamics и другие.

Существует целый ряд задач управления, не перекрываемых ни классом АСУП, ни классом АСУТП. Частично эти задачи не перекрываются из-за отсутствия возможностей программного обеспечения этих уровней системы управления. Среди них находятся и задачи, решение которых может оказать решающее влияние на эффективность предприятия в целом: диспетчеризация производства, оперативное планирование, управление качеством продукции и многие другие.

Наличие базы данных реального времени масштаба предприятия – это только лишь предпосылка для их решения (необходимое, но недостаточное условие). Ряд разработчиков инструментальных систем предлагают использовать с этой целью специальный тип программных продуктов. Это могут быть небольшие системы, предназначенные для решения отдельных типовых задач, например, системы расчета и согласования материальных балансов. Появился ряд интегрированных систем, поддерживающих, наряду с функциями хранения и представления информации, решение задач расчета тепловых и материальных балансов, планирования, оптимизации и т.п. К наиболее известным программным продуктам этого класса ПО относятся InfoPlus компании Aspen Tech, «Калькулятор качества» фирмы ПЕТРОКОМ, PI System (Plant Information System) компании OSIsoft.

Современное развитие информационных технологий (ИТ) создало предпосылки для успешной интеграции всех уровней управления многоуровневой системы и создания интегрированной информационной системы предприятия.